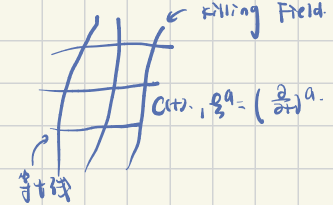
Day 100

Ch8. 求解 Einstein 方程.

Def 1. 一个时空被称为是稳态(stationary)的若在它上面有一个 timelike Killing field. 对应 g_{ab} 称为稳态度规.

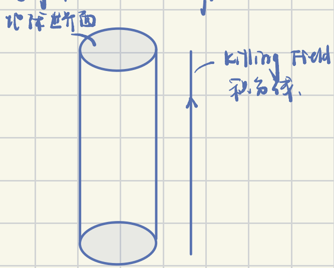


选择以 t 为 x^0 坐标, 以 ξ^a 的积分曲线为 x^0 坐标线的坐标系称为该 Killing 场的适配坐标系.

由 Killing Field 的定义, 和适配坐标系的性质有: $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = (\mathcal{L}_\xi g)_{\mu\nu} = 0$. 换言之, $g_{\mu\nu}$ 具有时间平移不变性.

或者可以等效定义为: 若 (M, g_{ab}) 上存在局部坐标系 $\{x^\mu\}$, 使得 $(\mathcal{L}_{(\frac{\partial}{\partial t})} g)_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial t} g_{\mu\nu} = 0$. 则 $g_{\mu\nu}$ 为稳态度规.

e.g. 地球表面引力场.



e.g. (1). (M, η_{ab}) 为稳态时空

(2). $(\mathbb{R}^2, g_{ab})$ 中度规在某种坐标为 $(ds)^2 = -t^4 (dt)^2 + (dx)^2$. 只需作一坐标变换 $T = t^{-1}$, $x = x$.

then $(ds)^2 = -(dT)^2 + (dx)^2$. 从而它其实是 (M, η_{ab}).

⚠ 是否是稳态时空与坐标系无关.

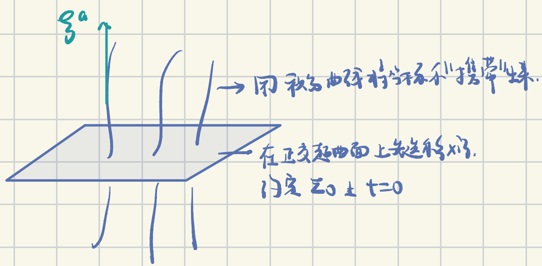
Def 2. (M, g_{ab}) 中矢量场 v^a 是超曲面正交的若对 $\forall p \in M$, 存在与 v^a 正交的超曲面 Σ 使 $p \in \Sigma$.

Def 3. (M, g_{ab}) 是静态(static)的, 若它存在超曲面正交类时 Killing 场.

Thm 1 设 ξ^a 为 Killing 场且它处处与 $\Sigma_0 = \{p \in M \mid t(p) = 0\}$ 正交. 则 $\Sigma_{t_1} = \{p \in M \mid t(p) = t_1\}$ 也处处与 ξ^a 正交.

从而这样选取之后 t 的基矢和空间基矢正交. 从而 $(ds)^2 = g_{00}(x^1, x^2, x^3)(dt)^2 + g_{ij}(x^1, x^2, x^3)\, dx^i dx^j$.

我们希望找一个尽可能简单的t.



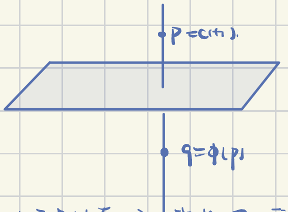
Day. 101.

静态时空比稳态时空更强的一点是：它不仅有时间平移不变性，还有时间反射不变性。

< 为此，应证明 $(\phi^* g)_{ab}|_p = g_{ab}|_p$ 或 $(\phi_* g)_{ab}|_p = g_{ab}|_p$ >

Def 1. 时间反射 (time reflection) 是 $\phi: M \to M$，满足 $t(\phi(p)) = -t(p)$，$x^i(\phi(p)) = x^i(p)$。

Thm 1. 静态时空中 ϕ 是等度规映射。



1°. 先找 p, q 处坐标基矢间的关系。$\phi_* [(\frac{\partial}{\partial t})^a|_p]|_q = -(\frac{\partial}{\partial t})^a|_q$。 $\phi_* [(\frac{\partial}{\partial x})^a|_p]|_q = (\frac{\partial}{\partial x})^a|_q$ <这里 ϕ 是反演映射>

2°. 考虑 $\forall p$，$(\phi^* g)_{ab}|_p$ 和 $g_{ab}|_p$ 的关系。 在上文中的坐标系 $\{t, x^i\}$ 中考察。

$$(\phi^* g)_{00}|_p = [(\phi^* g)_{ab} (\tfrac{\partial}{\partial t})^a (\tfrac{\partial}{\partial t})^b]|_p = [g_{ab} (\phi_* \tfrac{\partial}{\partial t}|_p)^a (\phi_* \tfrac{\partial}{\partial t}|_p)^b]|_q = [g_{ab} \cdot -(\tfrac{\partial}{\partial t})^a|_q \cdot -(\tfrac{\partial}{\partial t})^b|_q] = g_{00}|_q \overset{\text{时间平移不变性}}{=} g_{00}|_p$$

把 q 点的 g "拉回" 至 p。

对其他分量，可使用类似方法证明。从而时间反演映射是等度规的。

由于星体有球对称性，因此我们研究它周围的时空是球对称的。设在我们研究所谓球对称时空，最基本的例子是 $(\mathbb{R}^3, \delta_{ab})$ 上的二维球面 (S^2, h_{ab})，其在球坐标系下线元：

$(ds)^2 = r^2((d\theta)^2 + \sin^2\theta (d\varphi)^2)$。在2D球面上至多有3个独立 Killing Field。由几何意义，立刻找到第一个为 $\xi_1^a = (\frac{\partial}{\partial \varphi})^a$。

而找到另外两个有些难度 $\begin{cases} \xi_2^a = (\frac{\partial}{\partial \theta})^a \sin\varphi + (\frac{\partial}{\partial \varphi})^a \cot\theta \cos\varphi \\ \text{(用对易子找到)} \quad \xi_3^a = [\xi_1, \xi_2]^a = (\frac{\partial}{\partial \theta})^a \cos\varphi - (\frac{\partial}{\partial \varphi})^a \cot\theta \sin\varphi \end{cases}$ 从而 (S^2, h_{ab}) 有最高对称性。

这里我们稍微补充与 Lie group 有关知识。 若我们有两群 G, G'，有一映射 $\rho: G \to G'$。

称 ρ 为群同态，都保持群内的乘法运算。$\rho(g_1 \circ g_2) = \rho(g_1) \circ \rho(g_2)$。 若它又 one-one onto，则称为群同构。

称 G 为 Lie Group，若 G 既是 Group 又是 Manifold，并要求群乘法 $G \times G \to G$ 和 $G \to G$ 都是 C^∞ 的。

由于每一个 Killing Field 诱导的 isometry 是一个单参群，从而 (S^2, h_{ab}) 上所有 isometry 的集合是3参数群（3维群）。

<e.g. 流形 M 上所有微分同胚的集合 $G_d = \{\text{diff}: M \to M\}$ 构成无穷维 Lie Group。

所有 isometry 集合：$G_I = \{\text{iso}: M \to M\}$ 的维度上限为 $\frac{n}{2}(n+1)$ >.

Day. 102.

(S^2, h_{ab}) 上 isometry 之集合为 3 维 Lie Group. 它与 $SO(3)$ 同构. 记作 $G_i = SO(3)$.

对于 M 上的一个单参群 $\{\phi_t | t \in \mathbb{R}\}$. 我们称过 p 的轨道是将所有群元作用在 p 点上一次所得点的集合. 对于 $G_i = SO(3)$. 可类似定义"轨道"概念. 但显然 G_3 过 $\forall p \in S^2$ 的轨道为全球面

Def 1. 时空 (M, g_{ab}) 称为球对称的. 若其等度规群含有同构于 $SO(3)$ 的子群 G_3. 且 G_3 的所有轨道 (不动点除外) 都是二维球面. 这些球面称为轨道球面.

e.g. $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 的 G_i 是 10 维. 其中空间转动的 3 维群同胚到 $SO(3)$. 且其轨道为 2D 球面.

对于任一 (M, g_{ab}). 考虑 φ 是 G_3 的一个轨道. 则 ξ_1^a, ξ_2^a, ξ_3^a 的积分曲线必然落在轨道上. 从而 φ 上任一点. ξ_1^a, ξ_2^a, ξ_3^a 都切于 φ.

由诱导度规定义. ξ_1^a, ξ_2^a, ξ_3^a 为 φ 上 Killing 场. 从而 $\hat{g}_{ab}$ 必为标准球面度规 h_{ab}. 从而有系 θ, φ 使 $\hat{g}_{ab}$ 表为: $(d\hat{s})^2 = K((d\theta)^2 + \sin^2\theta (d\varphi)^2)$.

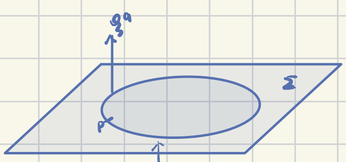
e.g. 对于 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$. 其线元在球系下可写作 $(ds)^2 = -(dt)^2 + (dr)^2 + (d\hat{s})^2$, $(d\hat{s})^2 = r^2((d\theta)^2 + \sin^2\theta (d\varphi)^2)$. 那么对于一般情形 K 是什么? 它与 φ 的面积有关.

φ 的面积为: $A = \int_\varphi \hat{\varepsilon}$. 而在任意坐标系下. 适配体元 $\hat{\varepsilon} = \sqrt{h}\, d\theta \wedge d\varphi$. 易知 $\sqrt{h} = K \cdot \sin\theta$. 从而 $A = K \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = 4\pi K$. 从而 $K = \frac{A}{4\pi}$.

then. let $r = (A/4\pi)^{1/2}$. 我们可以把这个 2D 球面度规写作 $(d\hat{s})^2 = r^2((d\theta)^2 + \sin^2\theta (d\varphi)^2)$. 但这里 r 不一定有半径的意义.

e.g. $\mathbb{R} \times S^2$ 上的一个圆周的"圆心"不在流形上. 或流形上各点到"球心"的距离并非 r.

下面. 我们讨论对称性最强一种对称性下. Einstein Eq. 求解. 我们先考虑所谓静态球对称度规.



过 p 点的轨道球面

Thm 1. 设静态球对称时空 (M, g_{ab}). 只有一个超曲面正交的类时 Killing Field. 则其轨道球面必与 ξ^a 正交.

之前. 我们已将度规在某系下的系简化至 $(ds)^2 = -g(x^1, x^2, x^3) \cdot (dt)^2 + g_{ij}(x^1, x^2, x^3)(dx^i)(dx^j)$.

下面利用球对称性进一步简化. 令 $x^1 = r$. $x^2 = \theta$. $x^3 = \varphi$. 令 $r = \sqrt{A/4\pi}$. 而 r, θ 则为球面 φ 上球坐标.

在一个球面上选好 (θ, φ) 后. 可使用该球面的 n^a 将 (θ, φ) 携带至其他球面.

从而我们有: $(ds)^2 = g_{00}(dt)^2 + g_{11}(dr)^2 + r^2((d\theta)^2 + \sin^2\theta (d\varphi)^2)$

由于球对称性. 可相信 g_{00}, g_{11} 与非 r, θ 的函数. 从而 $g_{00} = g_{00}(r)$. $g_{11} = g_{11}(r)$.

一般来说. 我们将球对称度规写成: $(ds)^2 = -\exp(2A(r)) \cdot (dt)^2 + \exp(2B(r)) \cdot (dr)^2 + r^2((d\theta)^2 + \sin^2\theta (d\varphi)^2)$.

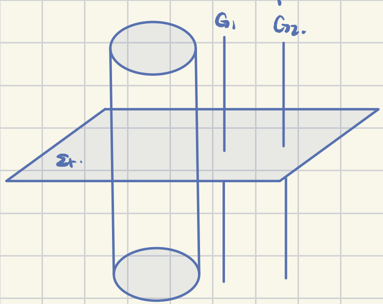
Day 103.

在静态时空且拥有球对称性的情况下，通过适当地坐标选择，我们可以使得球对称度规可有如下简单形式：$(ds)^2 = -\exp(2A(r))(dt)^2 + \exp(2B(r))(dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2\sin^2\theta(d\varphi)^2$.
那么，现在只需要确定两个一元函数。作为最简单的例子，我们考虑真空中Einstein方程。由 $R_{ab} - \frac{1}{2}R g_{ab} = 0$ 两侧求trace $\Rightarrow R - \frac{4}{2}R = 0 \Rightarrow R = 0$ $\Rightarrow R_{ab} = 0$.
具体而言，只有四个对角项非0，化简可得三方程。

$$\begin{cases} -A'' + A'B' - A'^2 - 2r^{-1}A' = 0 & (1) \\ -A'' + A'B' - A'^2 + 2r^{-1}B' = 0. & (2) \\ -\exp(2B)[1 + r(A' - B')] + 1 = 0. & (3) \end{cases}$$

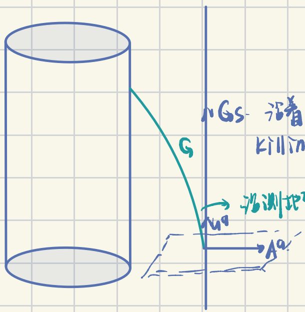
由(1)(2)对比有 $A' = -B'$. $\Rightarrow A = -B + \alpha$. 将其代入(3)有：$1 - 2rB' = \exp(2B)$. 可验证其通解 $\exp(2B) = \left(1 + c/r\right)^{-1}$.

代回度规表达式中，我们有：$(ds)^2 = -(1+\frac{c}{r})\exp(2\alpha)(dt)^2 + (1+\frac{c}{r})^{-1}(dr)^2 + (\qquad\qquad)$ 只需令 $t' = \exp(\alpha)t$，我们可将 $\exp(2\alpha)$ 吸收到 t' 中。$(\frac{\partial}{\partial t})^a$ 与 $(\frac{\partial}{\partial t'})^a$ 都是Killing Vec.
后面我们将 t' 直接写为 t. $\Rightarrow (ds)^2 = -(1+\frac{c}{r})(dt)^2 + (1+\frac{c}{r})^{-1}(dr)^2 + r^2((d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2)$. 可以看出它是渐近平直的。在弱场（远离球体）情形下，我们把它向牛顿力学靠拢。
近似：$(ds)^2 = -(dt)^2 + (dr)^2 + r^2((d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2) - \frac{c}{r}((dt)^2 + (dr)^2)$. 或 $g_{ab} = \eta_{ab} + \gamma_{ab}$ 可使用线性引力近似！具体而言 $\gamma_{00} = -\frac{c}{r}$. 而牛顿极限下 $\phi = -\frac{1}{2}\gamma_{00} = \frac{c}{2r} = -\frac{M}{r}$
$\Rightarrow (ds)^2 = -(1-\frac{2M}{r})(dt)^2 + (1-\frac{2M}{r})^{-1}(dr)^2 + r^2((d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2)$. ⚠ 这里是星体的质量m，是星体产生引力强弱的一个表示，是所谓"引力质量"。
现在我们对于静态球对称的外部空间几何稍作讨论。取两个静态观者 G_1, G_2，它们的 $\theta\varphi$ 坐标一样，只有 r 不同。只有两度规有 Σ_t 诱导的线元：



$(d\hat{s})^2 = (1-\frac{2M}{r})^{-1}(dr)^2 + r^2((d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2)$，则观者 P_1, P_2 之距离 $l = \int (h_{ij}dx^i dx^j)^{1/2} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt{1-2M/r}}dr > r_2 - r_1$.
我们将 $r_2 - r_1$ 称为两观者的坐标距离，而 $\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt{1-2M/r}}$ 称为固有距离。

接下来，我们谈谈为何"引力是时空弯曲"。换言之，我们想将牛顿力学的 $\vec{g}$ 与时空中几何量建立联系。$\vec{g} = a^a$ 某某观者 $= -A^a$ 静态观者。
计算静态观者的加速大小。有 $\chi = (-\xi_a\xi^a)^{1/2}$. 则 $A^a = \nabla^a \ln\chi$. $A_a = \nabla_a \ln\chi = (d\ln\chi)_a = \chi^{-1}(d\chi)_a$ 注意到 ξ^a 实为我们的坐标基矢。从而
$\chi = \sqrt{-g_{00}} = (1-\frac{2M}{r})^{1/2}$ 从而 $A_a = (1-\frac{2M}{r})^{-1}\frac{M}{r^2}(dr)_a$.



※只有在瞬时静止观者的意义下. 3加=4加

$|\vec{g}| = (g_{ab}A^aA^b)^{1/2} = (g^{ab}A_aA_b)^{1/2}$

$= [(1-\frac{2M}{r})^{-2}\frac{M^2}{r^4}g^{ab}(dr)_a(dr)_b]^{\frac{1}{2}}$. 由于 $g^{11} = g_{11}^{-1}$.

从而最终求得 $g = (1-\frac{2M}{r})^{-1/2}\frac{M}{r^2}$.

并将配上国际单位制. 补上常数. $g = (1-\frac{2GM}{c^2r})\frac{GM}{r^2}$.

由于 $2GM/c^2r \sim 10^{-9}$. 从而 $g \sim \frac{GM}{r^2} \sim 9.8\,m/s^2$.

本图中, G视为Gs的瞬时静止观者. 故以G测Gs得A^a.

反过来, 以Gs测G则得测出 $-A^a$.

※、若时空不稳态, 则不存在静态观者. 那么我们无法按上面的方法理解引力! 怎么办? 实际上引力更"本质"的体现应是测地偏离效应.

$g=9.8$这种"引力"效应可以通过引入局部惯性坐标系消除 (Einstein电梯). 而测地偏离无法通过任何坐标变换消除.

Day 104.

之前，我们解出史瓦西解所需的条件是：①、真空 ②、静态球对称时空。 Birkhoff 指出：真空方程的球对称解必为静态解（有与 killing 场处处正交的超曲面）。

从而，恒星在坍缩过程中，只要其保持球对称，则其外部场方程的解必为真空静解。它与电磁学中以下结论相似：球对称电荷分布的电磁场必为静电场。

从而不存在球对称电磁波。 ⚠ 球面电磁波/波阵面为球面的电磁波，其 E/B 并无球对称性，从而是非球对称电磁波）

这对应于没有单极电磁辐射。

下面，我们考虑带电星体外部的 Einstein 方程的求解，所谓 Reissner—Nordstrum Solution（R-N解）。所以我们要联立求解以下方程：

$T_{ab}=\frac{1}{4\pi}\left(F_{ac}F_b{}^c-\frac{1}{4}g_{ab}F_{cd}F^{cd}\right)$. $\nabla^a F_{ab}=0$. $\nabla_{[a}F_{bc]}=0$. $G_{ab}=8\pi T_{ab}$. 而且里面的所有方程都不可单独求解，应联立求解。

电磁场可分为类光/非类光两类。定义复张量，$\Sigma_{ab}=F_{ab}+i\,{}^*F_{ab}$. $\Sigma_{ab}\Sigma^{ab}=2(F_{ab}F^{ab}+i\,F_{ab}{}^*F^{ab})$. 我们将 $\Sigma_{ab}\Sigma^{ab}=0$ 的场称为类光电磁场。

从而类光电磁场：$\begin{cases}F_{ab}F^{ab}=0\\ F_{ab}{}^*F^{ab}=0\end{cases}$ 使用 $\begin{cases}E_a=F_{ab}Z^b\\ B_a=-{}^*F_{ab}Z^b\end{cases}$ 展开，有：$\begin{cases}F_{ab}F^{ab}=2(B^2-E^2)\\ F_{ab}{}^*F^{ab}=4g^{ab}E_aB_b\end{cases}$ 由于上式左侧是绝对的，这意味着 B^2-E^2 与 $g_{ab}E^aB^b$ 也是绝对的。从而类光条件等价于 $B^2=E^2$，$\vec{B}\cdot\vec{E}=0$。这是平面电磁波的特征。

Day. 205 ~ 206.

直接联立以上方程一定没戏，我们先来化简一下. 由于 $dF=0 \Rightarrow \exists A$. 使 $F=dA$. 或 $F_{ab}=2\nabla_{[a}A_{b]}$. 可验证由于 [ ] 的存在, $\nabla_a \to \partial_a$.

设存在球对称. 我们仍用球对称形式度规: $(ds)^2 = -\exp(2\alpha(r))(dt)^2 + \exp(2\beta(r))(dr)^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$. 利用球对称性, 矢量不应有切向分量 $\Rightarrow A_2=A_3=0$.

再利用 A_a 的规范自由性. $\tilde{A}_a = A_a + \nabla_a \chi$. 则 $\tilde{A}_1 = \tilde{A}_a \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a = A_a\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a + \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a \nabla_a \chi = A_1 + \frac{\partial \chi}{\partial r}$. 从而我们可以通过规范把 A_1 消掉. 从而只有 $A_0(r)$.

从而找 $F_{\mu\nu}$ 非0分量: $F_{01} = -F_{10} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 = -\partial_1 A_0 = dA_0(r)/dr$. 其余的分量全0. 现在要求解 $\nabla_a F^{ab}=0 \Rightarrow F^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0$.

$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sqrt{g}\, F^{\mu\nu}\right)$. <实际上由外微分形式, 可将 ∇_a 直接换 ∂_a>. 且该式在 $r=0$ 时有意义 $\Rightarrow \frac{d}{dr}\left[r^2 F^{10}(r)\exp(\alpha+\beta)\right]=0$

用度规升降一下: $0 = \frac{d}{dr}\left(e^{\alpha+\beta} g_{00} g_{11} F^{10} r^2\right) = \frac{d}{dr}\left(e^{-\alpha-\beta} F_{10} r^2\right)$. 从而其通解为: $F_{10} = \frac{Q}{r^2}\exp(\alpha+\beta)$. 所以我们就将电磁场用度规表示,

$\Rightarrow F_{ab} = -\frac{Q}{r^2}\exp(\alpha+\beta)(dt)_a \wedge (dr)_b$.

下面又用到一个化简技巧: 可证出 $T = g^{ab}T_{ab} = 0$. 从而又可证出标量曲率 $R=0$. 从而我们只需解: $R_{ab} = 8\pi T_{ab}$, 将 R_{ab} 与 T_{ab} 分量代入, 立刻有:

$T_{00} = F_{10}^2 \cdot \exp(-2\beta)/8\pi$. $T_{11} = -F_{10}^2 \cdot \exp(-2\alpha)/8\pi, \cdots, \cdots$. 关于R的部分与史瓦西时是一致.

$T_{00} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{0c}F_0{}^c - \frac{1}{4}g_{00}F_{cd}F^{cd}\right)$, $F_{cd}F^{cd} = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = F_{01}F^{01} + F_{10}F^{10} = 2F_{01}F^{01}$ $F_{0c}F_0{}^c = F_{01}F_0{}^1 = F_{01}F_{01}g^{11}$

最终化简出的方程为 $d(r\cdot\exp(2\alpha(r))) = \left(1-\frac{Q^2}{r^2}\right)dr \Rightarrow \exp(2\alpha) = 1 + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{C}{r}$. 从而 $(ds)^2 = -\left(1+\frac{Q^2}{r^2}+\frac{C}{r}\right)(dt)^2 + \left(1+\frac{Q^2}{r^2}+\frac{C}{r}\right)^{-1}(dr)^2 + r^2\left((d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2\right)$.

在 $r\to+\infty$ 时. $\frac{Q^2}{r^2}\to 0$. 从而电荷影响比引力先消失 $\Rightarrow C=-2M$. 又由于 $F_{10} = \frac{Q}{r^2} = E$, 从而Q恰为星球所带之电荷.

$\Rightarrow (ds)^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)(dt)^2 + \left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}(dr)^2 + r^2\left((d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2\right)$. 容易计算得到 $F_{ab}F^{ab} = -2Q^2/r^4 \neq 0$. 从而 F^{ab} 并非类光电磁场.

那么这样解出来的是个静电场. 而非 $\vec{B}\cdot\vec{E}=0$ 的电磁波. 从而它必定是非类光的. [注: 若你将"静电场"认为 $E=$ Const, $B=0$ 的电磁场. 那么这是对静态而言的了].

$E_a = F_{ab}Z^b = -\frac{Q}{r^2}(dt)_a\wedge(dr)_b = -\frac{Q}{r^2}\left[(dt)_a(dr)_b - (dr)_a(dt)_b\right]Z^b$. 由于 $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$ 不归一. 设 $f(r) = -\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)$ $\Rightarrow Z^b = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^b f(r)^{-1/2}$.

$\Rightarrow E_a = \frac{Q}{r^2} f^{-1/2}(r)\cdot(dr)_a = \frac{Q}{r^2}(e_1)_a$.

若将 $\alpha(r), \beta(r) \to \alpha(t,r), \beta(t,r)$. 所得的解和之前一样. 从而这是对 Birkhoff theorem 的推广: Electro vac 中场方程之球对称解必为静态解.

Day 20 |

让我们看一看在其他对称性下的度规。

我们先看3D情形下的轴对称。处理3D轴对称时，我们通常使用柱坐标 (ρ, z, φ)。⚠ 记得区分轴对称和柱对称（后者有沿z平移对称性）。

<球对称：Killing Field 诱导的单参数群的子群同构于SO(3)，且任一点之轨道为空间二维面>。

将这个对称性推广到4D时空中，我们说 g_{ab} 轴对称，则存在有闭合积分曲线的类空 Killing 场 ψ^a。若它稳态，则又有类时场 ξ^a，且 $[\psi^a, \xi^a] = 0$。

而对于所谓"平面对称"，我们可先考察2D平面 $(\mathbb{R}^2, \delta_{ab})$，它有3个K场：$(\frac{\partial}{\partial x})^a, (\frac{\partial}{\partial y})^a, (\frac{\partial}{\partial \varphi})^a = -y(\frac{\partial}{\partial x})^a + x(\frac{\partial}{\partial y})^a$。由它们三个诱导的单参数群，称为「欧氏群」E(2)。

所以我们可立刻给定义：g_{ab} 称作"平面对称的"，若其等度规群含有与E(2)同构的子群 G_3，且 G_3 的所有轨道为2D平面。

与Birkhoff Theorem类似，平面对称度规+真空 可以推出静态时空，而且还可找出此情形下唯一对应的度规。选坐标 $\{T, x, y, z\}$ ⇒ $(ds)^2 = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+kz}}\left(-(dT)^2 + (dz)^2\right) + (1+kz)\left((dx)^2 + (dy)^2\right)$。

自然地，你可直接读出此度规的K.V.，有 $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$，以及 $\frac{\partial}{\partial \varphi} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$。换言之，由以上三个可以自动生成额外K.V.：$(\frac{\partial}{\partial T})^a$。

值得格外注意的一点：以上度规含有k，但它并未确定一个单参度规族！let $t = k^{-1/3}T$, $z = k^{-4/3}(1+kZ)$, $x = k^{2/3}X$, $y = k^{2/3}Y$.

⇒ $(ds)^2 = \pm z^{-1/2}[-(dt)^2 + (dz)^2] + z[(dx)^2 + (dy)^2]$. "平面对称时空"比"平面对称度规"更高的要求是要有平面对称的物质场。

我们现在来看Einstein方程. $G_{\mu\nu}(x)=0 \Rightarrow R_{\mu\nu}(x)-\frac{1}{2}R(x)g_{\mu\nu}(x)=0$. $R_{\mu\nu}(x)$ 和 $R(x)$ 均可由 $g_{\mu\nu}(x)$ 表出, 从而. 我们有 $\{g_{\mu\nu}(x)\}$. 这10个待求函数.
而 $G_{\mu\nu}(x)=0$. 实际上有10个方程. 所以看起来是10方程求10函数 而我们有恒等式 $\nabla_{[a}R_{bc]d}{}^{e}=0$. 由它推出 $\nabla^a G_{ab}=0$. 这导致4个微分恒等式 $G^{\mu}{}_{\nu;\mu}=0$.
从而 $g_{\mu\nu}(x)$ 之间将就有4个约束. (你可以理解为=定了其中4个. 连带着就又定4个) 从而实际有效的只有6个方程.
为什么关于坐标分量的方程有如此高的自由性? 从 g_{ab} 出发. 它在任何坐标系下的分量 $g_{\mu\nu}$, $g'_{\mu\nu}$, $g''_{\mu\nu}$… 都是它的解. 换言之 Einstein方程定了时空几何. 但不确定一个坐标系.
在球坐标系中. 我们可得出 施瓦西时空的度规. $g_{00}(r)=-(1-\frac{2M}{r})$. $g_{11}(r)=(1-\frac{2M}{r})^{-1}$ $g_{22}(r)=r^2$. $g_{33}(r,\theta)=r^2\sin^2\theta$
若我们定义所谓各向同性坐标. $\{t,r,\theta,\varphi\}\to\{t',r',\theta',\varphi'\}$. $t=t'$. $r=r'(1+\frac{M}{2r'})^2$. $\theta=\theta'$. $\varphi=\varphi'$. 从而 $(ds)^2$ 会被写成一个很丑的样子. 总之 $g_{\mu\mu}$, $\mu=0,1,2,3$ 与之前不一样了.
那么. 我们应补充所谓坐标条件. (应有4个). e.g. $\begin{cases} g_{00}=-1 & g_{0i}=0 \end{cases}$ (高斯法坐标).
$g^{ab}\nabla_a\nabla_b x^\sigma=0$, $\sigma=0,1,2,3$. (谐和坐标系) 等价于 $g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}=0$.

下面考虑有源Einstein Eq. $G_{\mu\nu}(x)=8\pi T_{\mu\nu}(x)$. 简化起见. 我们将物质场取为尘埃 $\Rightarrow$. $T_{ab}=\rho U_a U_b$. 写成分量形式: $G_{\mu\nu}=8\pi\rho g_{\mu\sigma}U^\sigma g_{\nu\rho}U^\rho$
从而 $\{g_{\mu\nu}, U^\sigma, \rho\}$ 均为未知. 共有15个待求函数. 在方程的数目上. Einstein场方程有10个关于 $g_{\mu\nu}(x)$ 的方程. 通过恒等式删除4个后还有6个、而 由物质场带来的补充方程有:
p与ρ的关系/物态方程(1个). 能动张量满足 $\nabla^\mu T_{\mu\nu}=0$. (4个. <这与前面的恒等式不同. 前面的恒等式是Riemann Tensor 自动满足的恒等式 (写出来就满足). 而 $\partial^\mu T_{\mu\nu}=0$ 是
要被求解的. 恒等式的作用不在于"方程找方程". 或者说将变量"绑定"起来. 从而使得一些变量被解出后另一些变量不需再求解(可自动得到). e.g. $g_{01}(x)=g_{10}(x)$ >.
下面我们不依赖于坐标地讨论无源方程: 以 $R_{ab}[g]$ 记 g_{ab} 对应的Ricci Tensor. 可以证明. 取任意微分同胚 ϕ. 我们有 $\phi_*(R_{ab}[g])=R_{ab}[\phi_* g]$
从而 若 g_{ab} 为场方程的解. 换言之 $G_{ab}[g]=0 \Rightarrow \phi_*(G_{ab}[g])=0. \Rightarrow G_{ab}[\phi_* g]=0$. 从而 $\phi_* g$ 也是场方程的解. 看起来. g_{ab} 与 $\phi_* g_{ab}$ 似乎代表了不同的几何.
< g_{ab} 与 $\phi_* g_{ab}$ 描述了相同的时空几何 >. 这里面的"trick"在于. 微分同胚的主动语言 描述点之间的映射 而被动语言则是坐标变换. <新新系=旧旧新>.

Day. 109.

考虑两流形 (M, g_{ab}), $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$, 且 $\tilde{g}_{ab} = \phi_* g_{ab}$. 若流形上无附加结构, 则只需指定 $\phi: M \to \tilde{M}$, 就可使 M, $\tilde{M}$ "非常像". 设在流形上有附加的度规结构.

若要使它们像, 则应有附加条件. $\tilde{g}_{ab} = \phi_* g_{ab}$ 在 M 上取 u^a, v^b. 有 $g_{ab}|_p u^a v^b = (\phi^* \tilde{g})_{ab}|_p u^a v^b = \tilde{g}_{ab}|_q (\phi_* u)^a (\phi_* v)^b$. $=1$: 利用附加条件 $\phi_* g_{ab} = \tilde{g}_{ab}$ $=2$: 利用推前映射定义.

显然你可证明. $\phi_*(u^a v^b) = (\phi_* u)^a (\phi_* u)^b$. 此后, 我们考虑在一个流形上. (M, g_{ab}) 与 $(M, \phi_* g_{ab})$ 等价. 这时在 M 上任一点都有两个度规. $g_{ab}|_p$ 与 $\phi_* g_{ab}|_p$. "等价"或"同几何"

并非是 $g_{ab}|_p u^a v^b = \phi_* g_{ab}|_p u^a v^b$. 而是 $g_{ab}|_p u^a v^b = \phi_* g_{ab}|_p (\phi_* u)^a (\phi_* v)^b$. $\Rightarrow$ g_{ab} 在 p 处的几何与 $\phi_* g_{ab}$ 在 $\phi(p)$ 处的几何是相同的.

从而, 我们有两种理解. 若一个 M 上有一个 g_{ab}, 则它可通过两个不同坐标系产生两组不同分量 $g_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}'$. 它们代表相同几何.

{若一个 M 上有 g_{ab}, $\phi_* g_{ab}$. 则它通过一个坐标系产生两组分量. $g_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}'$. 它们也代表相同几何.

从而, 我们将 $g^{ab} \to \phi_* g^{ab}$ 称作 GR 中的规范变换. 我们现有三种规范变换: ①. A^a ②. g_{ab} ③. $g_{ab} = \eta_{ab} + \gamma_{ab}$. $\gamma_{ab} \mapsto \tilde{\gamma}_{ab} + \partial_{(a}\xi_{b)}$. ③其实是②的特例.

我们对③与②的等价性做一点证明: $\tilde{g}_{ab} - g_{ab} = \partial_{(a}\xi_{b)}$. 令 $\xi^a = t \cdot \lambda^a$. 从而 $\tilde{g}_{ab} - g_{ab} = t \cdot \partial_{(a}\lambda_{b)}$.

而 $\mathcal{L}_\lambda \eta_{ab} = \lambda^c \partial_c \eta_{ab} + \eta_{cb} \partial_a \lambda^c + \eta_{ac} \partial_b \lambda^c = \partial_a \lambda_b + \partial_b \lambda_a = \partial_{(a}\lambda_{b)}$. 从而我们有: $\tilde{g}_{ab} - g_{ab} = t \cdot \mathcal{L}_\lambda \eta_{ab} \simeq t \cdot \mathcal{L}_\lambda g_{ab}$ (略去了一阶小量).

从而 $\tilde{g}_{ab} - g_{ab} \cong t \cdot \mathcal{L}_\lambda g_{ab} = t \cdot \lim_{s \to 0} \frac{1}{s}(\phi_s^* g_{ab} - g_{ab})$. 由于 t 足够小. 取 $s = t$. 以上得证.

补充: 以 $R_{abc}{}^d$, $\tilde{R}_{abc}{}^d$ 代表 g 与 $\tilde{g}$ 的 Riemann Tensor Field. 我们刚才看到. 将 p 处 g_{ab} 推前至 $\phi(p)$ 处, 得 $\phi_* g_{ab}$. 同时将所有矢量一起推前, 则在 p 处与 $\phi(p)$ 处则能得到同样结果. 所以我们相信. $\phi_*(R_{abc}{}^d|_p) = \tilde{R}_{abc}{}^d|_{\phi(p)}$. (根据我们前面说的, 只要将 p 处 g_{ab} 的矢量推至 $\phi(p)$, 就可得到 $\phi(p)$ 处 $\tilde{g}_{ab}$ 的矢量).