DAY 1

Chap 1. Introduction to topological space.

我们用 X 代表集合，其中元素记作 x。$\Rightarrow x \in X$ 说明元素属于集合。

设 X 的子集为 A。$\exists A \subset X$ 代表 A 含于 X。

集合间的笛卡尔积：$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$.

我们将 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 记为 $\mathbb{R}^2$。$\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 记为 $\mathbb{R}^3$。$\mathbb{R}^N$ 自带 N 个坐标。（自然坐标）

在 $\mathbb{R}^N$ 中，可以自然地谈导两个元素间的距离。$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_i - y_i)^2}$.

我们可以考虑两个集合间的映射 (map)，记作 $f: X \to Y$。元素间映射记为 $f: x \mapsto y$.

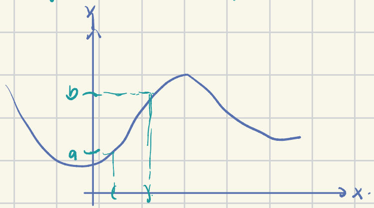
将 y 称为 x 的像，而 x 称为 y 的逆像。若映射 f 是"一一映射"，则对于任意的 y，它的像只有不多于一个。 * 若 f 是"到上"(onto)的，则对于任意 $y \in Y$ 都有逆像。

我们用符号 C^0 代表一个映射连续。用 C^1 表示映射连续且一阶可微。

例如，我们考虑 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在 x 处是 C^0 的，若对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$.

$\|x' - x\| < \delta \Rightarrow \|f(x') - f(x)\| < \varepsilon$. ↓等价于

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($x \mapsto y$) 是 C^0 的，若 Y 的任意开区间的逆像是 X 的开区间之并。（这个定义便于推广）



注：我们会考虑 $B \subset Y$ 在映射 f 下的逆像。

$f^{-1}[B] = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.

DAY 2

我们将 $\mathbb{R}$ 上的集合分成两类：open subset（开区间之并）/ 非开的集合。我们现在希望研究任一集合的子集是开的还是闭的 → 定义拓扑。

非空集合的 X 的一个拓扑 $\mathcal{T}$ 是 X 的若干子集的集族，满足：

a). $X,\ \phi \in \mathcal{T}$

b). 若 $O_i \in \mathcal{T}$，$i=1,2,\cdots n \in \mathcal{T}$. $\Rightarrow \bigcap_i O_i \in \mathcal{T}$.

c). 若 $O_\alpha \in \mathcal{T}$ $\Rightarrow \bigcup_\alpha O_\alpha \in \mathcal{T}$

在给一个集合 X 选定拓扑 $\mathcal{T}$ 后，我们得到拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$. e.g. $\mathcal{T}$ 为 X 所有子集的集合，称为离散拓扑.

$\mathcal{T}$ 中只包含 (X,ϕ)，称为凝聚拓扑

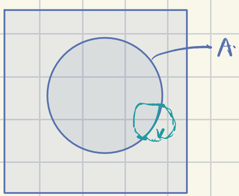
对于 $x=\mathbb{R}^n$. 我们将以 x_0 为球心，r 为半径的开球定义为 $B(x_0,r)=\{x\in\mathbb{R}^n,\ |x-x_0|<r\}$

那么我们定义所指"通常拓扑" $\mathcal{T}_u=\{$空集或 $\mathbb{R}^n$ 中能表为开球之并的子集$\}$

设 $(X,\mathcal{T})$ 是拓扑空间. 考虑 X 的子集 A. 我们要为 A 选择其"诱导拓扑" S. 一种简单的想法是使得 $\mathcal{T}$ 与 S 对 A 中任一集合的判断结果相同. 但若 A 为非开集时会出问题.

一个巧妙的定义是：$S=\{V\subset A \mid$ 存在 X 中的开集 $O\in\mathcal{T}$，使得 $V=A\cap O\}$ 　　* 将 X 中开集与 A 的交集定义为 A 中的开集.

例子：$\mathbb{R}^2$ 的圆周



显然，圆周 A 不可写成 $\mathbb{R}^2$ 中的开圆盘之并，因此它是 $\mathbb{R}^2$ 中非开子集.
在 A 中取 $V\subset A$. 按 induced topology 的定义，V 为 A 中的开子集.

（这个定义的应用范围更广泛）.

考虑两个拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 和 (Y,S). 我们要建立它们之间的映射：$f: X\to Y$. 我们称 $f: X\to Y$ 为 C^0 的，若对于 $\forall O\in S \Rightarrow f^{-1}[O]\in A$.

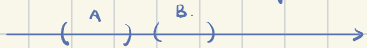
若 $(X,\mathcal{T})$ 与 (Y,S) 之间存在一个映射 $f: X\to Y$. 满足：a). f 是一一到上的（对于 $\forall y\in Y$，其逆像 $x\in X$ 有且只有一个. 换言之，f 既单又满）.

b). f 和 f^{-1} 都连续. 则称 f 是从 $(X,\mathcal{T}) \to (Y,S)$ 的同胚映射，简称同胚.

> 补充材料：紧致性

什么样的集合是闭的？若某一集合的补集为开集，则此集合是闭的。显然，全集 X 和空集是既开又闭的。

考虑 $\mathbb{R}^1$ 上的子集。



令 $X = A \cup B$，X 上的拓扑为由 $\mathcal{T}_u$ 诱导的拓扑。根据诱导拓扑，A 是开的，$X \setminus A$ 也是开的，则 A 是既开又闭的。

什么样的拓扑空间是连通的 (connected)？若拓扑空间既开又闭的子集只有两个，则称该集合是连通的。

若一个集合 X 内任意两点都可以被 X 内部的一条连续曲线连接，则称集合 X 是弧连通/道路连通的。

Def 1. 设 $\{O_\alpha\}$ 为 $A \subset X$ 的开覆盖，若 $\{O_\alpha\}$ 的有限个元素组成的子集 $\{O_{\alpha_1}, O_{\alpha_2}, \cdots O_{\alpha_n}\}$ 覆盖 A，则称 $\{O_\alpha\}$ 有有限子覆盖。

Def 2. 若 $A \subset X$ 的任一开覆盖都有有限子覆盖，则称 A 是紧致的 (compact)。

Example 1. 设 $x \in X$，则独点子集 $A = \{x\}$ 必紧致

Example 2. $A = (0, 1] \subset \mathbb{R}$ 不是紧致的。

解释：显然 $\{(\frac{1}{n}, 2), n \in \mathbb{N}\}$ 是 A 的开覆盖，而它没有有限子覆盖。

Example 3. $\mathbb{R}$ 的任意闭区间都是紧致的 (Heine-Borel 定理)。我们可以方便地找到开覆盖 e.g. 对于 $[0, 1]$ 我们可以使用 $\{(0-\varepsilon, \frac{1}{2}+\varepsilon)(\frac{1}{2}-\varepsilon, 1+\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ 来覆盖它。

Def 3. 称拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 为 T_2 空间或 Hausdorff 空间，若 $\forall x, y \in X$ $(x \neq y)$，$\exists O_1, O_2 \in \mathcal{T}$，使 $x \in O_1$，$y \in O_2$ 且 $O_1 \cap O_2 = \phi$。

换言之，X 中任意两个元素可以分别被两个不交的开集覆盖。

Theorem 1. T_2 空间中子集 $A \subset X$ 为紧集可以推出 A 为闭集。

Theorem 2. 若 $(X, \mathcal{T})$ 是紧致的且 $A \subset X$ 为闭集，则 A 为紧致的

pf：由于 A 是闭的，故 $X-A$ 是开的。设 $\{O_\alpha\}$ 为 A 的任一开覆盖，则由于 $X-A$ 开，$\{O_\alpha, X-A\}$ 为 X 的开覆盖。由于 X 紧，故可找有限子覆盖 $\{O_1, \cdots O_n, X-A\}$。

由于 $X = X-A \cup A$，而 $X-A$ 恰开覆盖 $X-A$，则 $\{O_1, \cdots O_n\}$ 开覆盖 A，故 A 也是紧的。

Def 4. $A \subset \mathbb{R}^n$ 是有界的，若存在开球 $B \subset \mathbb{R}^n$ 使 $A \subset B$。（A 可被开球"包裹"住）

Theorem 3. $A \subset \mathbb{R}^n$ 是紧的，当且仅当 A 为有界闭集。

Pf：先由紧性推出有界闭。设 A 为紧的，则由于 $\mathbb{R}$ 为 T_2 空间，则可推出 A 为闭的。由于 A 必可被开球 $(-m, m)$ 覆盖，故 A 有界。

再由有界闭推紧。设 A 为有界闭的，由 A 有界，$A \subset [-M, M]$。由于 $\mathbb{R}$ 的任一闭区间都紧可知 $[-M, M]$ 是紧的。令 $C = [-M, M]$，$\mathcal{T}$ 为 $\mathcal{T}_u$ 在 C 上的诱导拓扑。

可证 $(C, \mathcal{T})$ 是紧的，而 $A \subset C$ 是闭集（$C \setminus A$ 是开集），故由 Th. 2，A 是紧的。

Theorem 5. 设 $A\subset X$ 是紧的，$f: X\to Y$ 是连续的，则 $f[A]$ 在 Y 也是紧的。

换言之，同胚映射（既单又满，且连续）保存子集的紧性。

Pf: 设 $\{O_\alpha\}$ 是 $f[A]$ 的任一开覆盖，f 的连续性保证 $f^{-1}[O_\alpha]$ 为开，故 $\{f^{-1}[O_\alpha]\}$ 为 A 的开覆盖。

由于 A 紧，故 A 有 $\{f^{-1}[O_i]\}$ 这一有限子覆盖，则 $f[A]$ 必有有限子覆盖 $\{O_i\}$。

Def 5. 在同胚映射下保持不变的性质被称为集合的拓扑性质，紧致性、连通性、T_2 性都是拓扑性质。

Theorem 6. 设 X 紧致，$f: X\to \mathbb{R}$ 连续，则 $f[X]\subset\mathbb{R}$ 有界。

Pf: 由于 X 紧，$f[X]$ 紧，而在 $\mathbb{R}$ 上紧和有界闭可以互推。

Theorem 7. 设 $(X_1, \mathcal{T}_1)$，$(X_2, \mathcal{T}_2)$ 都紧，$\mathcal{T}$ 为 $\mathcal{T}_1$，$\mathcal{T}_2$ 的乘积拓扑，则 $(X_1\times X_2, \mathcal{T})$ 紧。

Theorem 8. $A\subseteq\mathbb{R}^n$ 紧，当且仅当它是有界闭。

Example. 由 Th 8 知 $\mathbb{R}^2$ 中圆周是有界闭，从而是紧的，从而它不可与 $\mathbb{R}$ 上任一开区间同胚。

Def 6. 映射 $S: \mathbb{N}\to X$ 称为 X 中的序列，我们往往直接将序列记为 $\{x_n\}$。

Def 7. $x\in X$ 称为 $\{x_n\}$ 的极限，若对于 x（处在其中）的任一开邻域 O 都存在 $N\in\mathbb{N}$，使 $x_n\in O$ $\forall n>N$，我们也称 $\{x_n\}$ 收敛于 x。

Def 8. $x\in X$ 称为 $\{x_n\}$ 的聚点，若 x（处在其中）的任一开邻域 O 中都含有 $\{x_n\}$ 中无限多点。

显然 $\{x_n\}$ 的极限一定是其聚点，但聚点不一定是极限。

我们称拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 是第二可数的，则 $\mathcal{T}$ 存在可数子集 $\{O_1, O_2, \cdots\}$，使任一 $O\in\mathcal{T}$ 都可被 $\{O_1, O_2, \cdots\}$ 之并表示。

Def 9. 若 $A\subset X$ 是紧的，则 A 中任一序列都有在 A 内的聚点。

若任一序列都有在 A 内的聚点且 $(X, \mathcal{T})$ 第二可数，则 A 是紧的。