Day 9(续) 施瓦西时空·续

*一个静态球对称时空的线元可以写为：$(ds)^2 = g_{00}(dt)^2 + g_{11}(dr)^2 + r^2((d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2)$.

通过利用球对称性和静态性这两个性质，选择合适的坐标 $\{t, r, \theta, \varphi\}$，施瓦西度规的线元可以写为：$(ds)^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)(dt)^2 + \left(\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}(dr)^2 + r^2((d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2)\right)$.

其中 $t \in [-\infty, +\infty]$，$\theta \in [0, \pi]$，$\varphi \in [0, 2\pi]$。在 $r = 2M$ 处和 $r = 0$ 处度规都有奇性，定义 $r_s = 2M$，显然，只有 $r_s > R$ 时，我们才需关注 r_s 处的奇性。

然而奇点要分两类："时空奇点"是 g_{ab} 的奇点，而"坐标奇点"是 g_{ab} 并不奇异，但由于坐标的选择问题使得它的某些分量奇异的点。$r=0$ 为时空奇点，而 $r_s = 2M$ 为坐标奇点。

我们考虑前两维：$(ds)^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)(dt)^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}(dr)^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left[(dt)^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-2}(dr)^2\right]$. Let $(dr_*)^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-2}(dr)^2$. 从而 $r^* = r + 2M\ln\left(\frac{r}{2M}-1\right)$.

$\Rightarrow (ds)^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left[(dt)^2 + (dr_*)^2\right]$. 再引入 $v = t + r^*$，$u = t - r^*$ $\Rightarrow t = \frac{1}{2}(v+u)$，$r^* = \frac{1}{2}(v-u)$. $\Rightarrow (ds)^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dv\,du$.

不难注意到，$t \in (-\infty, +\infty)$，$r^* \in (-\infty, +\infty)$。再引入 $V \in (0, +\infty)$，$V = \exp(\beta v)$，$U \in (-\infty, 0)$，$U = -\exp(-\beta u)$.

$\Rightarrow ds^2 = -\beta^2\left(\frac{r-2M}{r}\right)\exp[-\beta(u-v)]\,dV\,dU$. $\exp[-\beta(u-v)] = \exp(-2\beta r)\left(\frac{2M}{r-2M}\right)^{4\beta M}$. 不妨令 $\beta = 1/4M$，则立刻有 $ds^2 = -\frac{32M^3}{r}\exp(-r/2M)\,dU\,dV$.

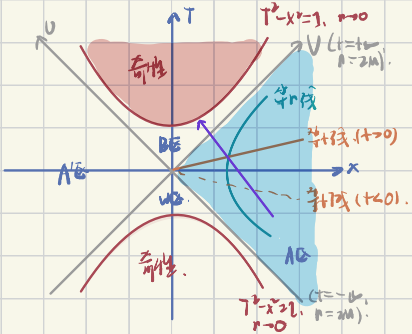
显然，我们应确认 $r = r(V, U)$。$V \cdot U = \exp\left(\frac{v-u}{4M}\right) = \exp\left(\frac{r^*}{2M}\right) = -\exp\left(\frac{r}{2M}\right)\left(\frac{r}{2M}-1\right)$。从而这样的限制 $\begin{cases} 0 < V < \infty \\ -\infty < U < 0 \end{cases}$ 其实是由于 $r > 2M$，这一条件给出的，这么，我们完全可以将 U, V 延拓到更大的区域中。另外，$r=0$ 处奇点不可通过坐标变换消除，这是由于任一类光 $r=0$ 测地线均不完备，且 $R_{abcd}R^{abcd}$ 在 $r \to 0$ 时沿测地线发散，从而 $r \to 0$ 时有曲率奇性。

从而 U, V 取值范围被 $r > 0$ 限制，$\Rightarrow VU < 1$。为了方便，不妨再做一次变换。

引入 $T = \frac{1}{2}(V+U)$，$X = \frac{1}{2}(V-U)$。从而有史瓦西度规在 kruskal 坐标中的线元：$ds^2 = \frac{32M^3}{r}\exp(-r/2M)(-dT^2 + dX^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2)$.

不难得到：$\left(\frac{r}{2M}-1\right)\exp(r/2M) = X^2 - T^2$，从而它允许的范围是 $X^2 - T^2 > -1$。由于 $r=0$ 无法通过任何坐标变换消除，从而 kruskal 延拓称为 Schwarzschild 时空的最大延拓。

这给出 2D 时空图，其中每一点代表一 2D 球面。



AE：未做延拓时，我们研究的范围。

下面对此图进行分析：

- 等r线为以 V, U 轴为渐近线的双曲线（阴面是类时的，所以画出），与 U、V 轴平行的所有直线为类光测地线。

下面考察等t线，在 $\beta = 1/4M$ 情形下，$\begin{cases} V = \exp(v/4M) \\ U = -\exp(-u/4M) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = 4M\ln V \\ u = -4M\ln(-U) \end{cases}$ 而 $t = \frac{1}{2}(u+v) = 2M\ln\frac{V}{(-U)} \to 2M\ln\frac{V}{|U|}$（可推广）。从而 $t = \text{Const}$ 意味着 $V = \alpha|U|$.

引图被划分为 A、B、W 四个区，在四个区域中，都可以分别给出坐标变换关系 $\{t, r\} \to \{T, X\}$。例如，在AE有：$\to \begin{cases} VU = -\exp\left(\frac{r}{2M}\right)\left(\frac{r}{2M}-1\right) \\ r_* = r + 2M\ln\left|\frac{r}{2M}-1\right| \end{cases}$

$\begin{cases} T = (r/2M-1)^{1/2}\exp(r/4M)\sinh(t/4M) \\ X = (r/2M-1)^{1/2}\exp(r/4M)\cosh(t/4M) \end{cases}$

容易看出，从A区出发的、不断减小的（指向左上方）的类光曲线必然进入BE；而从BE出发的类时/类光线必然留在BE并最终到达奇点。

*相反地，容易看出WE是"只出不进"的，从而WE称为"白洞"。

下面考虑施瓦西时空中的 Killing 场。由球对称，我们有三个反应球对称性的 killing 场
$\begin{cases} \xi_1^a = \left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^a \\ \xi_2^a = \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^a\sin\varphi + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^a\cot\theta\cos\varphi \\ \xi_3^a = [\xi_1, \xi_2]^a = (\partial/\partial\theta)^a\cos\varphi - (\partial/\partial\varphi)^a\cot\theta\sin\varphi \end{cases}$ 另有反映静态的 $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$

值得注意的是，在B区，W区，$g_{ab}(\frac{\partial}{\partial t})^a(\frac{\partial}{\partial t})^b>0$，从而 $\xi^a=(\frac{\partial}{\partial t})^a$ 为类空Killing场。在"静态"时空中要求存在超曲面正交的类时Killing矢量场，从而B区、W区并非静态时空。

由于在A、B区交界线上 $t\to+\infty$，从而不可在交界线上定义 $(\frac{\partial}{\partial t})^a$。但是，我们可以有 $\xi^a=(\frac{\partial}{\partial t})^a=\frac{1}{4m}[v(\frac{\partial}{\partial v})^a-u(\frac{\partial}{\partial u})^a]$.

从而这个矢量场在A、A'区类时，而在B、W区类空，在交界线上类光。

静态时空中两个静态观者

不妨设出光线从G发出，到被G'接收过程中的红移，$z=\frac{\lambda'-\lambda}{\lambda}$。若将$r'$固定，则$z$为$r$的函数，且满足 $dz/dr<0$，$\lim_{r\to 2m} z(r)=+\infty$

所以称 $r\to 2m$ 为"无限红移面"。

注意：静态时空必稳态，而稳态却不一定静态。例如 $\tilde{\xi}^a=\xi^a+\beta(\frac{\partial}{\partial\varphi})^a$，仍为Killing场，它对应一个稳态观者，从而它也有对应的"无限红移面" $\tilde{\xi}^a\tilde{\xi}_a=0$.

在Kruskal和图中绘制坍缩星表面的一般情形的世界线是简单的，而在以下两种情形绘制。

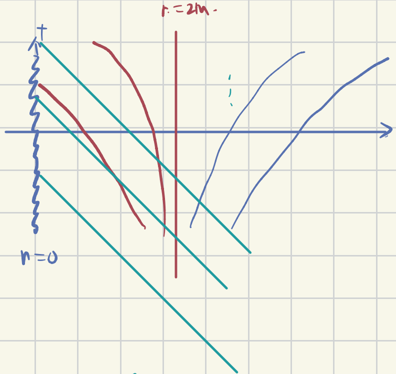
下面，我们不妨再借另一坐标系来讨论一下关于视界附近的其他问题。（所谓"内向Eddington"坐标系）。取 $v=t+r_*$，并以 $\{v,r,\theta,\varphi\}$ 组成新系。

这个坐标虽不覆盖Kruskal最大延拓的全部时空，但可以覆盖A区、B区。其线元 $ds^2=-(1-\frac{2m}{r})dv^2+2dvdr$。（由于 $v\in(-\infty,+\infty)$，从而对应 $V\in(0,+\infty)$，所以该坐标对应A、B区）。

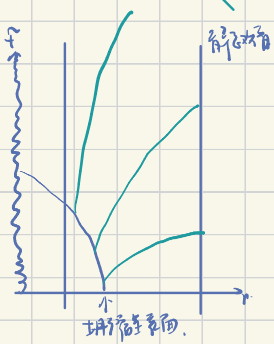
考虑该坐标系中的类光曲线 $\gamma(\lambda)$，有 $0=-(1-\frac{2m}{r})(\frac{dv}{d\lambda})^2+2\frac{dv}{d\lambda}\frac{dr}{d\lambda}=\frac{dv}{d\lambda}\left[-(1-\frac{2m}{r})\frac{dv}{d\lambda}+2\frac{dr}{d\lambda}\right]$。从而类光曲线分为两族 $\begin{cases} dv/d\lambda=0 & \left((\frac{\partial}{\partial r})^a\text{为类光矢量}\right) \\ \frac{dv}{dr}=2r/(r-2m) \end{cases}$

为更直观一些，我们再做一个坐标变换：令 $\tilde{t}=v-r$。$\Rightarrow ds^2=-(1-\frac{2m}{r})d\tilde{t}^2+(\frac{4m}{r})d\tilde{t}dr+(1+\frac{2m}{r})dr^2$.

从而在此系下，两族类光曲线 $\begin{cases} d\tilde{t}/dr=-1 \\ d\tilde{t}/dr=(r+2m)/(r-2m) \end{cases}$ 绘制出来是这样的：



从而在 $r=2M$ 内的光子或观测者都不能再往外发，这与之前的分析一致。由于这里的 r 实际为径向坐标 r，所以将其绕 $r=0$ 旋转后可得 3D 时空图。



此外，它们都朝着 r 减小的方向，测地线越来越"平缓"。
从而在一个静态观者看来，它将不断收到坠落物体发出的信号，且信号间隔大小将以越来越小的速率趋近于 $r=2M$。

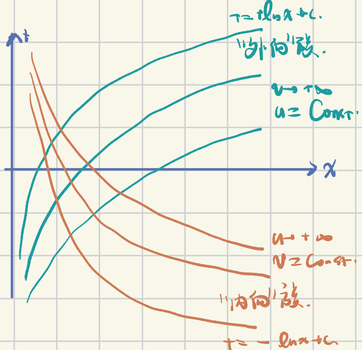
为了说明研究奇异度规的奇点时，我们为何会做这样的坐标变换，我们不妨先考虑一个有启发性的例子：Rindler 时空。它是闵氏时空中一族匀加速观者的参考系。

Rindler 时空的度规写为：$(ds)^2=-x^2(dt)^2+(dx)^2$。则在 $x=0$ 处，$|g_{\mu\nu}|=0$，从而有奇点。

下面我们说明：Rindler 时空中，过每一点有两条类光测地线，从而全时空有两族类光测地线。我们会发现这两族测地线均不完备，从而将表示时空是否被"删去"了某些区域，并尝试将这些区域补上。若可以补上，则 $x=0$ 只是坐标奇性。

设 $\gamma(\lambda)$ 为类光测地线，λ 为仿射参数，有：$0=g_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^b=-x^2\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2+\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2$。解出 $\left(\frac{dt}{dx}\right)=\pm\frac{1}{x}$ ⇒ $t=\pm\ln x+C$。

在图中简单地画出这两族测地线如下：



借通两族测地线，可以定义两个新坐标，分别沿"外向"族和"内向"族增加：$\begin{cases} v = t + \ln x \\ u = t - \ln x \end{cases}$

从而计算在新坐标下的线元：$\begin{cases} t = \frac{1}{2}(v+u) \\ x = \exp\left[\frac{1}{2}(v-u)\right] \end{cases}$ $\Rightarrow (ds)^2 = -\exp(v-u)\cdot dv\cdot du.$ $v, u \in (-\infty, +\infty)$

然而，这并非说明这两族测地线是完备的，因为 v, u 并非此测地线的仿射参数，而是否测地线完备要求仿射参数可取 $(-\infty, +\infty)$.

为此，我们给出仿射参数。由于 Killing 矢量场与测地线切矢之内积在该测地线上守恒，可写出 $E = -g_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^b = x^2\frac{dt}{d\lambda}$.

代入坐标变换 $\{x, t\} \to \{u, v\}$，有：$d\lambda = \frac{\exp(-u)}{2E}\exp(v)\,dv$. 沿该测地线积分 $\Rightarrow \lambda = \frac{\exp(-u)}{2E}\int \exp(v)\,dv + C = \frac{\exp(-u)}{2E}\exp(v) + C$. let $V = \exp(v)$.

从而 V 为"外向"族的仿射参数。同样，引入 $U = \exp(-u)$，为"内向"族的仿射参数。从而 $V \in (0, +\infty)$，$U \in (-\infty, 0)$。从而这两族测地线确实不完备。

使用 U, V 重新表达线元，有：$ds^2 = -dU\,dV$. 然而此时线元表达十分正常，所以我们自然可以将 U, V 的范围拓展至全平面。

从而，通过引入新的坐标 U, V，我们实现了对 Rindler 度规定义域的延拓。若进一步引入新坐标 $T = (V+U)/2$，$X = (V-U)/2$，从而立刻得到 $(ds)^2 = -(dT)^2 + (dX)^2$（其实是平直度规）.

使用最初的 $\{t, x\}$ 坐标时，实际上只是在闵氏时空中的R区.