Day 11. 时空的整体因果结构

一. 过去与未来.

在弯曲时空中任一点处的切空间中, 总可以指定任一部分为指向过去, 另一部分为指向未来. 在研究全时空时, 我们希望从一点过渡到另一点, 这种指定的"过渡"是连续的"
(有一些时空中这办不到, 例如一个圆柱 $S^1\times\mathbb{R}$ 上的某些情形). 我们称能连续指定光锥未来部分的时空称为时间可定向时空.

Theorem 11-1-1. 设 p 为 (M, g_{ab}) 中一点, $v^a, u^a \in V_p$ 为指向未来(过去)的类时/类光矢, $v^a \neq 0$, $u^a \neq 0$.

(1). 若 v^a, u^b 不都类光, 则 $g_{ab}v^a u^b < 0 \Rightarrow$ 二者有相同指向, 否则反之.

(2). 若 v^a, u^b 都类光, 则 $g_{ab}v^a u^b \begin{cases} =0, & \exists \beta \text{ 使 } v^a = \beta u^a \\ <0 & v^a, u^b \text{ 同向}, \quad v^a \neq \beta u^a \\ >0 & \text{反向} \end{cases}$

该命题证明在后面列.

Theorem 11-1-2 (1). 类光超曲面 Σ 上, 不存在切于 Σ 的类时矢量.
(若存在 v^a, 则 $g_{ab}v^a n^b = 0$, 然而 v^a, n^b 不全类光, 从而内积不为0).
(2). 类光超曲面 Σ 上每点必有一个切于 Σ 的类光矢向 (利用上面的定理证明容易).

Def 1. 若曲线 γ 上每点处切矢均为指向未来的类时矢量, 则称 γ 为指向未来的类时线. 若允许类光, 则 γ 称为指向未来因果线.

Def 2. 称 $p\in M$ 的切空间 V_p 的子集 $\mathscr{C}_p = \{v^a \in V_p \mid g_{ab}v^a v^b = 0\}$.

Def 3,4. p 的编时未来 (chronological future). $I^+(p) = \{q \in M \mid$ 存在 $p \to q$ 指向未来的类时线$\}$.
p 相对于 U 的… (U 为 p 的邻域). $I^+(p,U) = \{q \in U \mid$ 存在 $p \to q$, 且位于 U 内的指向未来类时线$\}$

需要注意: $I^+(p) = I^+(p,M)$. 且 $I^+(p,U) \neq I^+(p)\cap U$. ; 将"未来"换为"过去", 可以类似地定义.

Def 5. p 的因果未来. p 相对于 U 的因果未来. $J^+(p)$, $J^+(p,U)$.

注: p 点自身可以视为"因果线", 此时它的切矢为0. $[c(t)=p, \forall t]$, 从而我们说它是因果曲线. 从而我们可认为 $p\in J^+(p)$, $p \in J^-(p)$. *一般情况下 $p \notin I^+(p)$, 特例: 圆柱 $S^1\times\mathbb{R}$.

下面对 Thm 11-1-1 做补充证明: 而对时空因果结构感兴趣时, 仅用洛伦兹度规 g_{ab} 与使用闵氏度规 η_{ab} 的效果一致. 所以我们可以一直使用闵氏度规来讨论.

对于 u^a, v^a 不全类光的情形(1). 设 v^a 类时, 从而可以取一个正交标架 使 $v^a = \alpha (e_0)^a$. 从而 $g_{ab}v^a u^b = \eta_{ab}v^a u^b = -\alpha u^0$. 从而得证.

对于都类光的情形(2). 设 v^a 类光且非零, 故可找一组正交基底使 $v^a = \alpha(e_0)^a + \alpha(e_1)^a$. $\Rightarrow g_{ab}v^a u^b = -\alpha(u^0 - u^1)$.

由于 u^a 相类光 $\Rightarrow g_{ab}u^a u^b = 0 \Rightarrow (u^0)^2 \geq (u^1)^2$.

a). 若 $g_{ab}v^a u^b = 0$. 从而必有 $|u^0| = |u^1| \Rightarrow v^a = \beta u^a$.

b). $g_{ab}v^a u^b < 0 \Rightarrow |u^0| > |u|$. 且 u^0 与 α 同号. 从而 u^a 与 v^a 有相同指向. c) 的证明亦然.

Def 6. $p \in M$ 的邻域 N. 称为凸邻域. 若 $\forall q, r \in N$. 有 N 内唯一测地线联结 q, r. 之后, 我们通常称之凸法邻域.

Claim 11-1-3.

a). $p \in I^+(q)$, $q \in J^+(r)$ $\Rightarrow p \in I^+(r)$. *这里的证明不可直接将测地线延续. 需要进行"磨光".

b). $\begin{cases} p \in J^+(q), & q \in I^+(r) \Rightarrow p \in I^+(r). \\ p \in J^+(q), & q \in J^+(r) \Rightarrow p \in J^+(r). \end{cases}$

*. 一般时空的因果结构与无比闵氏不同. 但局部地看. 任何时空的因果结构都与闵氏时空类似.

Theorem 11-1-4. 任意时空 (M, g_{ab}) 内任一点都有凸法邻域 N. 其中任两点 p, q 间必有 N 内唯一测地线相连.

a). 若 $q \in I^+(p, N)$, 则 $p \to q$ 在 N 内唯一测地线为指向未来类时曲线

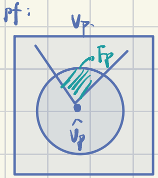
b). 若 $q \in J^+(p, N) - I^+(p, N)$. 且 $q \neq p$. 则 . . . . . . 指向未来类光曲线.

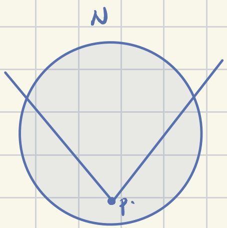
b'). 若 $q \in J^+(p, N) - I^+(p, N)$. 且 $q \neq p$. 则. N 内 $p \to q$ 的指向未来因果线必为类光测地线

Theorem 11-1-7. $\forall p \in M$. 有 $I^+(p) \in \mathcal{T}$ 即 $I^+(p)$ 为 M 的开子集.

Thm. 11-1-6. 将 $p \in M$ 的凸法邻域视作拓扑空间 $(N, \mathcal{S})$. $\mathcal{S}$ 为由 $\mathcal{T}$ 诱导的拓扑. 从而 $I^+(p, N)$ 为 N 的开集. 而 $J^+(p, N)$ 为 N 的闭集.

pf:





指数映射在 $\hat{V}_p \to N$ 同胚. 从而只需证明 $I^+(p, N)$ 的原像为 $\hat{V}_p$ 中开集.

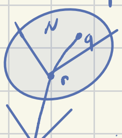
令 $F_p = \{v^a \in V_p \mid v^a$ 为指向未来的类时矢量$\}$ 由指数映射的定义. $\hat{V}_p$ 为开集. 从而 $O = F_p \cap \hat{V}_p$ 为 $\hat{V}_p$ (作为拓扑空间)中开集.

根据指数映射定义知道. $I^+(p, N) = \exp[O]$. $J^+(p, N) = \exp[\bar{O}]$. $\bar{O}$ 为 O 的闭包.

从而 $I^+(p, N)$. $J^+(p, N)$ 分别为 N 的开集和闭集. 由于凸法邻域 N 自身是 M 的开集.

且诱导拓扑的定义 在 N 为开集时. N 中集合在 $\mathcal{S}$ 下为开的在 $\mathcal{T}$ 下也为开. 从而 $I^+(p, N)$ 也为 M 的开集.

回到 11-1-7. 设 $q \in I^+(p)$. γ 为 $p \to q$ 的指向未来类时线. N 为 q 的凸法邻域. $\exists r \in \gamma \cap N$ 使 $q \in I^+(r, N)$.



从而对于 $\forall q \in I^+(p)$. 有邻域 $I^+(r, N) \subset I^+(p)$. 从而得证.

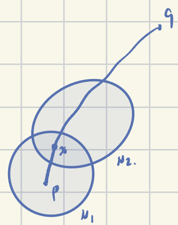
Thm. 11-1-8. Thm 11-1-4 的结论可以推广到弯曲时空

任意时空中. $q\in J^+(p)-I^+(p)$. 则 $p\to q$ 指未因果线必为类光测地线.

pf. 设任一点的凸法邻域为 N_λ. 则 $\{N_\lambda \mid \lambda\in[0,1]\}$ 为 $\eta(\lambda)$ 的开覆盖. 利用 $\eta(\lambda)$ 的紧性, 可从中选出有限子覆盖 $\{N_1,\dots,N_n\}$.

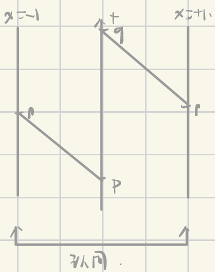
如图 取 $x\in N_1\cap N_2$. $x\in\eta[\lambda]$ 由凸法邻域的性质. 由 $p\in N_1$. 故 N_1 也为 p 的凸法邻域. 从而 $p\to x$ 有唯一类光测地线, 依次递推即可.

(还需考虑连续性问题. $\eta(\lambda)$ 已为连续曲线).



* 本问题的逆: 若存在 $p\to q$ 指未类光测地线. 问: $q\in J^+(p)-I^+(p)$? 答案显然为否.

如图 类光测地线存在, 而 $q\in I^+(p)$.



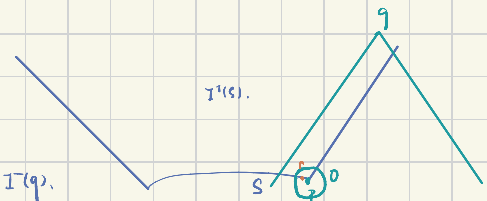
Def 7. $\forall S\subset M$. $I^+(S)=\bigcup_{p\in S} I^+(p)$.

Thm. 11-2-9. $I^+(S)=I^+(\bar S)$.

左含于右显然. 下证右含于左. 设 $q\in I^+(\bar S)$. $\exists p\in\bar S$. 使 $q\in I^+(p)$. 从而 $p\in I^-(q)$.

故 $\exists p$ 的开邻域 $O\subset I^-(q)$. 由于 $p\in\bar S \Rightarrow O\cap S\neq\emptyset$. 令 $r\in O\cap S$. 则 $r\in I^-(q)$.

从而 $q\in I^+(r)\subset I^+(S)$. 从而右含于左一定成立



Thm 11-2-10. $I^+[I^+(S)]=I^+(S)$.

Def 8. $J^+(S)=\bigcup_{p\in S} J^+(p)$.

Thm. 11-2-11. 以 $i[J^+(S)]$, $\overline{J^+(S)}$, $\dot{J}^+(S)$ 分别表示 $J^+(S)$ 的内部/闭包/边界, 有以下结论:

b). $\overline{J^+(S)}=\overline{I^+(S)}$ c). $I^+(S)=i[J^+(S)]$ a). $J^+(S)\subset\overline{I^+(S)}$ d). $\dot{I}^+(S)=\dot{J}^+(S)$.

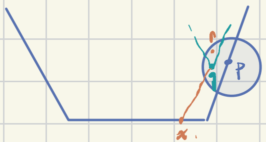
Pf. 下面证明 b). 由于 $I^+(S)\subset J^+(S)$, 从而 $\overline{I^+(S)}\subset\overline{J^+(S)}$. 下证另一边.

取 $p\in\overline{J^+(S)}$, 从而 p 的任一开邻域 N 与 $J^+(S)$ 有交. 再取 $q\in N\cap J^+(S)$. $I^+(q)$ 与 N 也有交 $\Rightarrow \exists r\in I^+(q)\cap N$.

由于 $q\in J^+(S)$ $\Rightarrow \exists x\in S$. s.t. $q\in J^+(x)$. 又由于 $r\in I^+(q)$ $\Rightarrow r\in I^+(x)$.

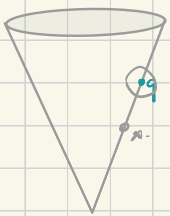
从而 p 的任一邻域与 $I^+(S)$ 有交. $\Rightarrow p\in\overline{I^+(S)}$

(而仅使用了点列的语言, 并使用了"$I^+J^+=I^+$")



注: 前面我们证明了 $\forall p$, $I^+(p)$ 为 M 上开集. 那么对于 $J^+(p)$ 呢? 利用已有结论, 不难得知凸邻域中 $J^+(p)$ 为闭集. $[J^+(p)=J^+(p,N)$, $N=M]$.

若在 M 中挖去 $J^+(p)$ 上任一点 x. 若我要分析此时 $J^+(p)$ 是否闭, 从而研究其补集 $B=X-J^+(p)$ 是否为开. 在此 x 挖去后, $q\notin J^+(p)$.



由于 q 的任一邻域都与 $J^+(p)$ 有交(不在 B 中), 从而 $J^+(p)$ 补集不开 $\Rightarrow J^+(p)$ 不闭

Def 9. 流形上一个集合 $S\subset M$ 称为非编时集 (achronal set), 则不存在 $p,q\in S$, 使 $q\in I^+(p)$. 〈一个中任意两点, 不可从非编时地一点到另一点〉.

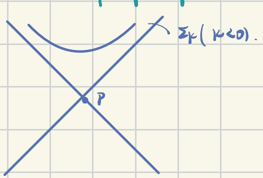
e.g. 闵氏时空中同时面, 类光线. 注意: 类空曲线/超曲面并不一定是 achronal set.

在进入第三节之前, 我们补充之前漏下的定理. **Claim** $q\in I^+(p,N)$, 则从 $p\to q$ 的唯一测地线为指向未来的类时线. 证明它需要一个引理:

Lemma 设 N 为 $p\in M$ 的凸法邻域. 定义此标量场 σ, $\sigma(q)=g_{ab}v^av^b$, $\forall q\in N$, $v^a=\exp^{-1}(q)$. 取超曲面 $\Sigma_k:=\{q\in N\mid\sigma(q)=k\}$, 则它有性质:

a). $k<0$ 时 Σ_k 为类空超曲面, $k>0$ 时 Σ_k 为类时超曲面. 而 $k=0$ 时 $\Sigma_0-\{p\}$ 为类光超曲面

b). N 内从 $p\to q$ 的唯一测地线正交于过 q 点的 Σ_k.



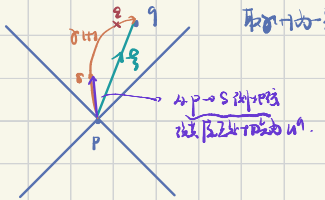
借 U_p 中正交归一基底 $\{(e_\mu)^a\}$, 在 N 中定义 Riemann 法坐标系.

$\Rightarrow$ $\sigma(q)=\eta_{\mu\nu}v^\mu v^\nu=\eta_{\mu\nu}x^\mu(q)x^\nu(q)$, $=-t^2+(x^2+y^2+z^2)$. 不难导出其梯度. $(d\sigma)_a=-2t(dt)_a+x(dx)_a+y(dy)_a+z(dz)_a$.

由 Riemann 法坐标的定义以及一点一矢定一测地线的性质, 一条测地线在法坐标系下对应一条直线".

以上性质使得我们可以将任一时空视作闵氏时空. 而在闵氏时空中上述命题的证明是简单的.

下证原命题 [若 $q \in \dot{I}^+(p,N)$，则 N 内 $p\to q$ 唯一测地线是指向未来的类光线] 要证测地线是类光的，不妨直接研究它在 p 处的切矢 u^a。



取 $\gamma(t)$ 为一条类时线，则 $g_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^b\Big|_{t=0} < 0$ $\Rightarrow \eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu(t)}{dt}\frac{dx^\nu(t)}{dt}\Big|_{t=0} < 0$ $(t=0)$.

$\Rightarrow \exists\varepsilon,\ \forall s\in(0,\varepsilon]$. $\eta_{\mu\nu}x^\mu(s)x^\nu(s) < 0$.（对 $\eta_{\mu\nu}x^\mu(t)x^\nu(t)$ 取一阶，而后得到）

$g_{ab}u^au^b = \eta_{\mu\nu}x^\mu(s)x^\nu(s) < 0$. 称 $[0,s]$ 段为 $\gamma(t)$ 的初始段，从而 $\gamma(t)$ 的"初始段"进入 N^-. $\langle N^- = \{p \mid \sigma(p) < 0\}\rangle$.

利用整条"初始段"内有一点，$\sigma(t)$ 的导 $\sigma'(t)$ 为负。

若 $\exists t_1$ 使 $\frac{d\sigma(t)}{dt}\big|_{t_1}=0$。这意味着 t_1 处 $\gamma(t)$ 切于等 σ 面，类时线不可能切于类光面。从而在 $p\sim q$ 段上总有 $d\sigma(t)/dt < 0$。从而对于测地线 ξ，

它在 p 处切矢 $g_{ab}\xi'^a\xi'^b = \eta_{\mu\nu}x^\mu(t)x^\nu(t) < 0$。独立于平移保持内积，从而测地线类时。 □

再证 [$q \in J^+(p,N) - I^+(p,N)$，$q \neq p$，则 N 内 $p\to q$ 的唯一测地线是指向未来类光线]。

类比前面的证明，这只需证出 $g_{ab}\xi'^a\xi'^b=0$ $\Rightarrow \sigma(q)=0$。这采用反证法。设 $\sigma(q)\neq 0$。不失一般性，设 $\sigma(q)>0$。令 Σ 为过 q 的等 σ 面，由引理，它是类时超曲面，

从而可在 Σ 面内找到 q 至 r 的指向未来类时线 $\Rightarrow r\in I^+(q,N)$.

$$\begin{cases} \sigma(r)=\sigma(q)>0 & \text{(位于同一等}\sigma\text{面内)} \\ r\in I^+(q,N),\ q\in J^+(p,N) \Rightarrow r\in I^+(p,N) \Rightarrow \sigma(r)<0. \end{cases}$$

从而产生矛盾，则必 $\sigma(q)=0$。 □

Thm. 11-1-12. $\forall S\subset M$，$\dot{I}^+(S)$ 都为 3 维 C^0 嵌入闭子流形。

证. 下面只证明它非类时。利用反证法，若 $\exists p,q$ 使 $q\in I^+(p)$ $\Rightarrow p\in I^-(q)$ $\Rightarrow p$ 有邻域 O 含于 $I^-(q)$。

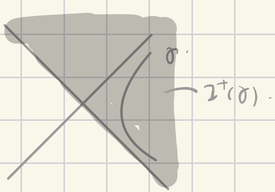
由于 $p\in \dot{I}^+(S)$ $\Rightarrow O$ 与 $I^+(S)$ 有交 $\Rightarrow \exists r\in O\cap I^+(S)$。

$\Rightarrow r\in O\subset I^-(q)$ $\Rightarrow q\in I^+(r)$.

又 $\exists x\in S$，$p\in I^+(x)$ $\Rightarrow q\in I^+(x)$ $\Rightarrow q\in I^+(S)$。由于 $I^+(S)$ 为开集，从而产生矛盾。 □

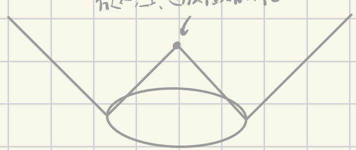
Q.9. a) 在闵氏时空中的光锥面上，此结论是显然的。

b) 考虑匀加速观者之世界线。



c)

在这点上，连续性只能到 C^0.



不可延的因果线

注：对于类时/因果的定义需要说明一下。这需要曲线 C^1。现在我们将定义推广至 C^0 线。若 C^0 线上任两点可被一条 C^1 类时/因果线相连，则我们称这条线也是类时/因果的。

Def. $\lambda: I \to M$ 为指未因果线，$p \in M$ 称为 λ 的未来端点，若对 p 的任一邻域 O，存在 $t_0 \in I$，使 $t > t_0$ 时，$\lambda(t) \in O$。（直观上，曲线在 p 点就"不再前进"了）。

1) 在我们的定义下，由拓扑的 Hausdorff 性，任一指未因果线至多有一个未来端点。

2) 若 $\lambda: [0,1] \to M$ 为指未因果线，不难验证 $\lambda(1)$ 为 λ 的未来端点。

3) 对于 $\lambda': [0,1) \to M$，由定义可知此时 $p = \lambda(1)$ 仍为 λ' 未来端点。从而一条线的未来端点并不一定是线上一点。

4) 若将 $p = \lambda(1)$ 从 M 中挖去，则 λ' 将不再有未来端点。这迫使我们指出：λ 与 λ' 都是可延的曲线，而有端点的可延。

具体而言，只需定义 $\tilde{\lambda}(t)$，$t \in [0,b)$ $(b>1)$，而 $\tilde{\lambda}(t) = \lambda'(t)$，$t \in [0,1)$。

Def. 我们将无未来端点的类时/因果线称为未来不可延的。

Thm. 11-2-1. 设 $C \subset M$ 为闭，则 $\forall q \in I^+(C)$，$q \notin C$，存在 q 的一条过去类时曲线 $\lambda \subset I^+(C)$，则它或是过去不可延的，或者在 C 上有过去端点。

因果条件

非编时 < 编时 < 因果 < 强因果 < 稳定因果

编时：无闭合类时线

因果：无闭合因果线

为度规的微扰，就可能导致闭合因果线出现。

强因果：$\forall p \in M$，对 p 之任意邻域 U，$\exists V \subset U$，使从 p 出发的因果线到 V 相交不多于一次。

但"经不起"微扰，就[illegible]一区之，会导致闭合因果线出现。

稳定因果：$\exists C^0$ 类时矢量场，使 $(M, \tilde{g}_{ab})$ 满足编时条件。

下面我们演示一下如何对度规作微扰。

Lemma. 11-3-2. (M, g_{ab}) 上有类时矢量场 t^a，其用度规降指标后为 t_a，则可以有一新度规 $\tilde{g}_{ab} = g_{ab} - t_a t_b$。
新度规也是洛伦兹度规，且其光锥"较大"。原度规……

设 $\{(e_\mu)^a\}$ 为 $(V_p, g_{ab}|_p)$ 处的正交归一基底，$t^a = \beta (e_0)^a$，$t_a = \beta (e_0)_a$。

$\Rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = \tilde{g}_{ab}(e_\mu)^a (e_\nu)^b = g_{ab}(e_\mu)^a (e_\nu)^b - t_a (e_\mu)^a t_b (e_\nu)^b = g_{\mu\nu} - \beta^2 \delta^0{}_\mu \delta^0{}_\nu$ $\Rightarrow \tilde{g}_{00} = -1-\beta^2 < 0$，$\tilde{g}_{11} = \tilde{g}_{22} = \tilde{g}_{33} = 1$，从而 $\tilde{g}_{ab}$ 为洛伦兹度规。

若 $g_{ab} v^a v^b = 0 \Rightarrow \tilde{g}_{ab} v^a v^b = g_{ab} v^a v^b - t_a v^a t_b v^b$。由于 t_a 类时，(t_a, v^a) 并非都正交，从而 $t_a v^a$ 不为 $0 \Rightarrow \tilde{g}_{ab} v^a v^b < 0$

下面，我们要讨论"经得起微扰的时空"。

Thm. 11-3-2. (M, g_{ab}) 为稳定因果的充要条件为 M 上存在可微函数 f. 使 $\nabla^a f = g^{ab}\nabla_b f$ 为类时矢量场. f 被称作整体时间函数.

Pf. 我们只证充分性. 取 $t_a = \nabla_a f$ (为与 f 面正交的余矢). 设 γ 为 $(M, \tilde{g}_{ab})$ 中某一条类时线. v^a 为其切矢. 只需证 $v^a \nabla_a f > 0$ 或 < 0 恒成立. 则此类时线必不闭合.

$$v^c \nabla_c f = \delta_a{}^c v^a \nabla_c f = \tilde{g}_{ab}\tilde{g}^{bc} v^a \nabla_c f = \tilde{g}_{ab} v^a \tilde{g}^{bc} \nabla_c f = \tilde{g}_{ab} v^a \tilde{g}^{bc} t_c = \tilde{g}_{ab} v^a \tilde{t}^b$$

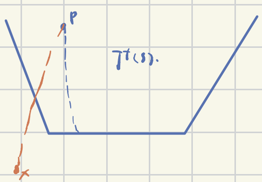
要证 $\tilde{g}_{ab} v^a \tilde{t}^b \neq 0$. 只需证出 $\tilde{t}^b$ 以 $\tilde{g}_{ab}$ 衡量为类时矢量场. 可验证 $\tilde{g}^{ab} = g^{ab} + \frac{t^a t^b}{1+\alpha^2}$. $(-\alpha^2 = g_{ab} t^a t^b = g^{ab}(\nabla_a f)\nabla_b f = t^a \nabla_a f.)$

$$\tilde{g}_{ab}\tilde{t}^a\tilde{t}^b = \tilde{g}^{ab} t_a t_b = g^{ab} t_a t_b + \frac{t_a t^a t_b t^b}{1+\alpha^2} = g^{ab} t_a t_b = -\alpha^2 + \frac{\alpha^4}{1+\alpha^2} = -\alpha^2/(1+\alpha^2) < 0. \quad \square$$

可证明. 稳定因果时空一定为强因果时空. 显然 f 沿每条类时线上升. 它可被视作一个<u>时间</u>. 每一个等 f 面都可被视作空间.

依赖域.

对于 $S \subset M$. $I^+(S)$ (或 $J^+(S)$) 称为 S 的未来影响域. 但这不代表 $J^+(S)$ 内的所有事件只依赖于 S. 记 $D^+(S)$ 为完全依赖于 S 的全体事件之集合

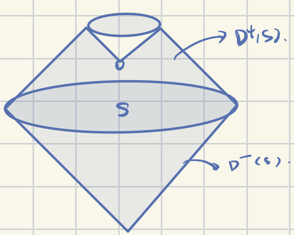


Def 1. 设 S 为 M 的非编时闭子集. 则 S 的未来依赖域定义为: $D^+(S) = \{p \in M \mid$ 过 p 的任一过去不可延因果线与 S 有交$\}$.

*不难证明 $S \subset D^+(S) \subset J^+(S)$.

e.g. 设 S 为 4D 闵氏时空中 x 轴 则 $D^+(S) = S$.

e.g. 设 S 为 4D 闵氏时空中的 3D 闭球体 $S = \{(x, y, z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$. 并且将时空中的点 $(1/2, 0, 0, 0)$ 挖去. 则不难看出 $D^+(S)$. $D^-(S)$ 如图.



Thm. 11-4-1. $D^+(S) \cap I^-(S) = \emptyset$.

Pf. 使用反证法. 设存在 $q \in D^+(S) \cap I^-(S)$. $q \in D^+(S)$ 说明从 q 出发的任一过去不可延因果线 λ 与 S 有交. 设 $p = \lambda \cap S$. 则 $p \in J^-(q)$.
而 $q \in I^-(S)$ 说明 $\exists\, r \in I^+(S)$ 使 $q \in I^-(r)$. 由于 $p \in J^-(q)$, $q \in I^-(r) \Rightarrow p \in I^-(r)$. 这与 S 的非编时性相矛盾.

Lemma. 11-4-2. 设 λ 为过 p 的过去不可延因果线. 则对于 $\forall p' \in I^+(p)$. 总有过 p' 的过去不可延类时线 $\gamma \subset I^+(\lambda)$

Thm. 11-4-3. $p \in D^+(S)$ 的充要条件是过 p 的任一过去不可延类时线与 S 有交.

Cauchy面、Cauchy视界与整体双曲时空

Def 1. 非编时闭集 $\Sigma\subset M$ 称为 Cauchy Surface. 若 $D(\Sigma)=D^+(\Sigma)\cup D^-(\Sigma)=M$.

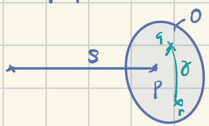
e.g. 闵氏时空中惯性坐标时 $t=t_0$ 之超曲面. 施瓦西时空最大延拓中 $T=0$ 之面. RW宇宙均匀面均为 Cauchy面.

显然, 闵氏时空挖去一点, 就没有Cauchy面. 所以并非每个时空都有 Cauchy面. 称有Cauchy面的时空为整体双曲时空.

Thm 11-5-2. 设 Σ 为 Cauchy面. 任一双向不可延因果线必交 Σ. $I^+(\Sigma)$、$I^-(\Sigma)$ 三者均有[illegible].

直观上, 我们可以感受到, Cauchy面是没有边缘的.

Def 2. 定义非编时闭集之边缘 $\mathrm{edge}(S)=\{p\in S\,|$ 对p的任一邻域 O 有 $q\in I^+(p,O)$, $r\in I^-(p,O)$, $\exists\ r\to q$ 的类时曲线 $\gamma\subset O$ 且 $\gamma\cap S=\emptyset\}$.

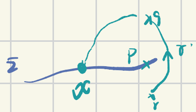


e.g. 设 S 为4D 闵氏时空中 3D球体. O 为S的表面. 不难验证 $\mathrm{edge}(S)=C$ 而按点拓定义 $\dot{S}=S$.

设 S 为 4D —— 中 x 轴. 则 $\mathrm{edge}(S)=S$.

S 为 4D —— 中类光超曲面 $t-x=0$. 则 $\mathrm{edge}(S)=\emptyset$.

Thm 11-5-3. 设 Σ 为Cauchy面. 则 $\mathrm{edge}(\Sigma)=\emptyset$.



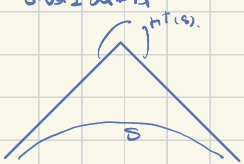
假定 $\mathrm{edge}(\Sigma)$ 不空. $p\in\mathrm{edge}(\Sigma)$. 则由定义, 过q延拓直至不可延 得到 $\tilde{\gamma}$. 从而 $\tilde{\gamma}$ 必交 Σ 于一点 x.

$\Rightarrow x\in I^+(q)$. $q\in I^+(p)$ $\Rightarrow x\in I^+(p)$. 与Cauchy面的非编时性相矛盾.

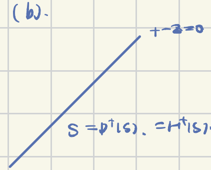
Def 3. 非编时闭集 S 的未来Cauchy视界 (Future Cauchy Horizon). $H^+(S)=\overline{D^+(S)}-I^-[D^+(S)]$

e.g. 在2D闵氏时空中的例子:

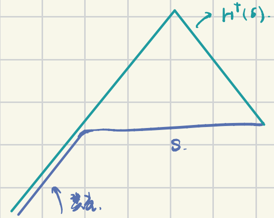
(a). S为类空双曲线



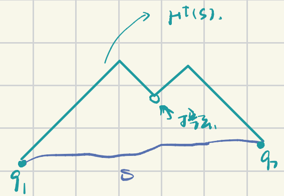
(b).



c).



d).



* 为何不将 $D^+(S)-S$ 作为定义？ 会将 d) 中 q_1, q_2 两点或 c) 中去掉区域减去。

* 对偶地，我们可以定义. $H^-(S)=\overline{D^-(S)}-I^+[D^-(S)]$. $H(S)=H^-(S)\cup H^+(S)$. 显然 $\dot H^+(S)\neq\dot D^+(S)$. 但可证明有 $\dot H(S)=\dot D(S)$.

Thm. 11-5-4. $H^+(S)$ 为非编时闭集.

Pf. 要验证其非编时，只需证明 $I^-[H^+(S)]\cap H^+(S)=\phi$.

$\begin{cases} H^+(S)=\overline{D^+(S)}-I^-[D^+(S)] \\ I^-[H^+(S)]\subset I^-[D^+(S)] \end{cases}$ 由于 $H^+(S)\subset\overline{D^+(S)}$. 从而 $I^-[H^+(S)]\subset I^-[\overline{D^+(S)}]$ 利用 $I(\bar X)=I(X)$.

从而 $H^+(S)\cap I^-[H^+(S)]=\phi$. 它是非编时的.

$H^+(S)$ = 闭 − 开 $=C\cap(M-O)$ = 闭 ∩ 闭 = 闭. □.

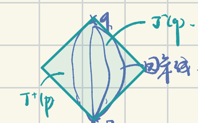
Thm. 11-5-8. 设 Σ 为非编时闭集，且 $\Sigma\neq\phi$. Σ 为 Cauchy 面 $\Leftrightarrow$ $H(\Sigma)=\phi$.

Pf. 若 Σ 为 Cauchy 面，则其 $D(\Sigma)=M$. $H(\Sigma)=\phi$ 是自然的.

右→左： $H(\Sigma)=\phi$ $\Leftrightarrow$ $\dot D(\Sigma)=\phi$ $\Leftrightarrow$ $\overline{D(\Sigma)}=i(D(\Sigma))$. 又由于 $i(D(\Sigma))\subset D(\Sigma)\subset\overline D(\Sigma)$. $\Leftrightarrow$ $\overline D(\Sigma)=i(D(\Sigma))=D(\Sigma)$. 从而 $D(\Sigma)$ 为既开又闭之集合.

对于连通流形 M，既开又闭的子集只有两个，ϕ 或 M. 由于 Σ 非空，从而 $D(\Sigma)=M$. $\Leftrightarrow$ Σ 为 Cauchy 面

Def 4. 一个时空 (M, g_{ab}) 称为整体双曲的，若它有 Cauchy 面.



Cauchy 面之定义. $D(\Sigma)=M$ 代表了时空中将发生什么 / 经历什么都反映在 Σ 上.

下面介绍一些刻画整体双曲时空的手段. 设 (M, g_{ab}) 有强因果. $p, q\in M$. $C(p,q):=\{\lambda\mid\lambda$ 为 $p\to q$ 指未 C^0 因果线$\}$.

显然. $C(p,q)\neq\phi$. 当且仅当 $q\in J^+(p)$. 对 $C(p,q)$ 可定义适当拓扑. 取 $U\subset M$. 定义 U 内的因果线之集合 $O(U)\subset C(p,q)$. 定义 $O(U)$ 为一开集.

通过研究 $(C(p,q), \mathcal{T})$，可研究该流形一些性质，例如：

Thm 5-20. 若流形 (M, g) 整体双曲，则 $J^+(p)\cap J^-(q)$ 为紧集.

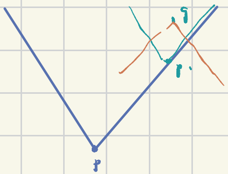
5-11 为闭集

Thm. 5-12. (M, g_{ab}) 为整体双曲，则 $J^+(p)$ 闭。

Pf. 只需证 $\overline{J^+(p)} = J^+(p)$. $\Rightarrow$ $\overline{J^+(p)} \subset J^+(p)$.

取 $r \in \overline{J^+(p)}$. $q \in I^+(r)$. $\Rightarrow r \in I^-(q)$. $\Rightarrow r \in I^-(q) \cap \overline{J^+(p)} \subset \overline{I^-(q) \cap J^+(p)} \subset \overline{J^-(q) \cap J^+(p)}$ ↙是闭的

$= J^-(q) \cap J^+(p)$.



Thm. 11-5-24. 整体双曲 (M, g_{ab}) 必为稳定因果，并且存在整体时间函数 f，使每个等 f 面都是 Cauchy 面，从而 M 有 Cauchy 面分层，并拓扑同胚于 $\mathbb{R} \times \Sigma$.