电动力学PART 6

#ElectroDynamics

狭义相对论简介

我们可以注意到，有许多电磁学规律都是与速度相联系的，例如洛伦兹力。在爱因斯坦之前，已经有很多人试图解释这个“速度”是相对于什么的速度。爱因斯坦基于对前人错误的分析（例如“以太”的引入），以及对于某些实验现象的观察（例如动生电动势和感生电动势的巧合），宣称：没有一个“绝对静止”的参考系，所有的速度都是相对于你目前选择的参考系而言的。于是，他提出了狭义相对论。狭义相对论的基础假设有两点，是：

- 相对性原理：物理定律在一切惯性系中都适用
- 光速不变：无论光源和观察者如何移动，观测到的真空中的光速总是不变的
  很容易通过光钟实验和一些几何关系得到以下几个结论：
- 同时的相对性：在某一惯性系内同时不同地发生的两个事件，在另一惯性系内不同时
- 动钟变慢：动钟记录的时间间隔 $\Delta\bar{t}$ 和静钟记录的 Δt 之间满足关系：
  $\Delta\bar{t}=\dfrac{1}{\gamma}\Delta t,\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$
- 动尺收缩：$\Delta\bar{x}=\gamma\Delta x$
  以及容易推出洛伦兹变换：

$$\bar{x}=\gamma(x-vt)\quad \bar{t}=\gamma\left(t-\frac{v}{c^2}x\right)$$

使用四维矢量可以将洛伦兹变换使用更简单的方式表达。令：

$$x^0=ct,x^1=x,x^2=y,x^3=z$$

洛伦兹变换被写为：

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = \Lambda x$$

我们使用 Λ 表示洛伦兹变换阵，Λ^{μ}_{ν} 表示第 μ 行第 ν 列的分量。因此洛伦兹变换的分量式被写成：

$$\bar{x}^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

对于两个矢量 a^{μ}, b^{μ}，变换前后其内积不变。这里的内积是：

$$a \cdot b = -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$$

我们玩一些符号上的游戏。我们注意到现在使用的矢量都有上标，我们将这样的矢量称为逆变矢量，而带有下标的矢量则称为协变矢量，它们的关系是：

$$a_{\mu} = (a_0, a_1, a_2, a_3) = (-a^0, a^1, a^2, a^3)$$

它们只有一个分量不一样。要想相互转化它们，你可以这样做：

$$a_{\mu} = g_{\mu\nu} a^{\nu}$$

$g_{\mu\nu}$ 称为闵可夫斯基度规。

我们已经发现两个四维矢量的点积是洛伦兹变换下的不变量。我们考虑一个四维矢量与其自身的点积 $a^{\mu}a_{\mu}$，如果这个值大于 0，则 a^{μ} 被称为是类空的；如果等于 0，则称为是类光的；如果小于 0，则称为是类时的。两个事件的间隔记为 $\Delta x^{\mu} = x^{\mu}_A - x^{\mu}_b$，$I = (\Delta x)^{\mu} (\Delta x)_{\mu}$ 称为两个事件间的不变间隔。如果 I 是类时的，则可以找到一个参考系使得两个事件发生在同一点；如果 I 是类空的，则可以找到一个参考系使得两个事件发生在同一时刻；如果 I 是类光的，那么两个事件可以被光信号连接。

一个粒子的运动轨迹可以在时空图上使用世界线表示出来。在时空图中，I 相等的面是双曲面（若 I 是类时的，则对应双叶双曲面；反之是单叶双曲面），洛伦兹变换会使得代表事件的点在同一个双曲面上移动。在两个事件的间隔是类时的时候，它们的顺序是绝对的（或者说，洛伦兹变换不会把点从双曲面的一叶变到另一叶）；而类空的时候，两个事件发生的先后顺序则依赖于观测的参考系。因此，为了保持因果律成立，符合物理规律的两个事件的间隔总是类时的。

狭义相对论动力学

考虑一个粒子相对于某惯性系 S 以速度 u 运动，则这个粒子上的时钟测得的时间 τ 与参考系中测得的时间 t 有如下关系：

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} dt$$

这里的 τ 称为粒子的固有时。由于 τ 是在相对粒子静止系中测得的时间，因此它是一个换系不变量，而 t 则随着参考系改变。我们将在参考系 S 中测得的事件间隔对时间的变化率称为粒子的速度：

$$u = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

而事件间隔对固有时的变化率则被称为固有速度：

$$\eta = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\tau}$$

注意到事件间隔 dI，或者说 Δx^μ 是遵循洛伦兹变换的量，而分母上的 $d\tau$ 则是换系不变量，很容易得知 η 遵循洛伦兹变换：

$$\bar{\eta}^\mu = \Lambda^\mu_\nu \eta^\nu$$

我们同样定义符合洛伦兹变换的动量：

$$p = m\eta$$

它的第 0 个分量恰好是能量：

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \approx mc^2 + \frac{1}{2}mu^2 + \frac{3}{8}\frac{mu^4}{c^2} + \cdots$$

第一项被称为静能，第二项则是经典力学中的动能。
实验结果指出：根据上面的定义，封闭系统的动量守恒和能量守恒依然成立。有一些小结论，例如 p 和自己的内积：$p^\mu p_\mu = -m^2c^2$，以及能量动量三角形 $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$。
这里动量和能量的表达式也预示着：可以有一种无质量的粒子以光速前进，它的动量和能量关系是 $E = pc$。

相对论情况下的牛顿第二定律仍然写为：

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$$

考虑外力 F 对粒子做的功：

$$W=\int F\cdot dI=\int\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}I}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}dt=\int\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}udt$$

其中：

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\cdot u=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{mu}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)\cdot u=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

从而，功能关系依然保持成立：

$$W=E_{final}-E_{initial}$$

牛顿第三定律在相对论中一般不成立（这是因为同时的相对性），只有两个物体接触时（施力点在同一点），牛顿第三定律才成立。因为力是四维动量对 t 的导数，而不是对固有时的导数，因此力也会出现一些千奇百怪的性质。例如可以推导出力的变换：

$$\bar{F}_y=\frac{\mathrm{d}\bar{p}_y}{\mathrm{d}\bar{t}}=\frac{F_y}{\gamma\left(1-\frac{\beta u_x}{c}\right)}$$

F_z 的变换和 F_y 一样，而：

$$\bar{F}_x=\frac{F_x-\beta(u\cdot F)/c}{1-\beta u_x/c}$$

为了避免这些复杂的变换，我们可以引入四维力：

$$K^\mu=\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau}$$

它与 F 的关系是 $K=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}F$ ，第 0 分量是功率量纲。

狭义相对论电动力学

实际上，电动力学的方程已经与狭义相对论吻合。不同的观察者可以在不同参考系中使用麦克斯韦方程组，有些人可能看到电场，有些人可能看到磁场，但是它们预测到

的粒子的运动是一致的。我们接下来的内容不是修正麦克斯韦方程组，而是为它们从相对论的角度找一套数学表述。

我们先给一个简单的引入例子：假设我们有带有 λ 电荷的（无限长的）线以速度 v 向右移动，又有带有 $-\lambda$ 电荷的线以速度 v 向左移动，两条线是重合的。在地面系中，一个速度为 u 的粒子离两条线距离为 s，正在向右运动。在地面系中，粒子处显然没有电场，粒子受到的力来自于电流 $2\lambda v$ 产生的磁场。但是，假如我们在粒子系中看，我们可以通过洛伦兹速度变换计算两根线的速度（显然，速度不同），又由于电荷守恒和尺缩效应，此时两条线所带的总电荷量是：

$$\lambda_{tot} = -\frac{2\lambda uv}{c^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

在粒子系中使用 $\bar{F} = qE$，并使用一次力变换 $F = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\bar{F}$，计算出的结果与直接在地面系中计算洛伦兹力的结果一致。因此，为了保证粒子系和地面系观测的结果一致，在地面系中必须有一个场给粒子施力，这个场就是磁场。

接下来我们仍然通过一些简单的思想实验推出电磁场的变换规律。考虑在 S_0 系中静止的平行板电容器，我们同时在 S_0 系和相对于 S_0 系向右以速度 v_0 运动的 S 系中考虑。在 S_0 系中电场可以被立刻写出：

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}\hat{y}$$

而在 S 系中，由于尺缩效应，$\sigma = \gamma_0\sigma_0$，因此

$$E^{\perp} = \gamma_0 E_0^{\perp}$$

这里垂直符号代表我们研究的电场与相对运动方向垂直。假如我们将电容器横过来放，那么收缩的就是电容器两极板的间距，但场强显然不依赖于这个间距，因此：

$$E^{\parallel} = E_0^{\parallel}$$

现在我们来看磁场。在 S 系中，电容器的上下极板运动形成电流，很容易计算其磁场为

$$B_z = -\mu_0\sigma v_0$$

我们再考虑一个相对于 S 以速度 v 运动的 $\bar{S}$ 系，它相对于 S_0 系运动的速度为 $\bar{v}$，则在 $\bar{S}$ 系中：

$$\bar{E}_y = \frac{\bar{\sigma}}{\epsilon_0} \quad \bar{B}_z = -\mu_0\bar{\sigma}\bar{v}$$

通过简单的计算可以得到：

$$\bar{E}_y = \left(\frac{\bar{\gamma}}{\gamma_0}\right)\frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \bar{B}_z = -\left(\frac{\bar{\gamma}}{\gamma_0}\right)\mu_0\sigma\bar{v}$$

而：

$$\frac{\bar{\gamma}}{\gamma_0} = \gamma\left(1+\frac{vv_0}{c^2}\right) \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

通过配凑，我们可以给出下面的变换公式：

$$\bar{E}_y = \gamma(E_y - vB_z) \quad \bar{B}_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)$$

将电容器横过来，与 xy 平面平行，可以使用类似的方式得到 $\bar{E}_z, \bar{B}_y$ 的表达式：

$$\bar{E}_z = \gamma(E_z + vB_y) \quad \bar{B}_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right)$$

前面我们已经推出 $\bar{E}_x = E_x$，但是我们现在还差 B_x 的变换，这可以通过考虑一个沿着 x 轴放置的螺线管来解决：设螺线管在 S 系中静止，则它产生磁场 $B_x = \mu_0 nI$，在 $\bar{S}$ 系中 $\bar{n} = \gamma n$，但是由于钟慢效应（随着螺线管一起走的钟变慢），有 $\bar{I} = \frac{1}{\gamma}I$，因此 $\bar{B}_x = B_x$ 。至此，我们获得了所有的变换规则。这里给出两个特殊情况：若 S 系中 $B=0$，那么 $\bar{B} = -\frac{1}{c^2}(v\times\bar{E})$；若 S 系中 $E=0$，则 $\bar{E} = v\times\bar{B}$。

我们已经看出：电场和磁场不是分开变换的，而是一起变换的！我们如何将其写在一起呢？答案是写进一个二阶张量里面。一个二阶张量在变换时服从规则：

$$\bar{t}^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\lambda \Lambda^\nu_\sigma t^{\lambda\sigma}$$

注意：*仔细看！里面有两次求和！这可不是矩阵乘法！*
我们使用一个二阶反对称张量来表示电磁场：

$$F^{01} = \frac{E_x}{c}, F^{02} = \frac{E_y}{c}, F^{03} = \frac{E_z}{c}, F^{12} = B_z, F^{31} = B_y, F^{23} = B_x$$

在这样的表示方法下，二阶张量的洛伦兹变换恰好可以符合电磁场变换。当然，如果我们将 $\frac{E}{c}$ 换成 B，将 B 换成 $-\frac{E}{c}$，这个变换也是成立的。我们将这样得到的 $G^{\mu\nu}$ 称

为 $F^{\mu\nu}$ 的对偶张量。

现在我们使用相对论的语言重建电动力学。首先我们需要表达源（电荷密度和电流密度）的变换。我们定义固有电荷密度为 $\rho_0 = \dfrac{Q}{V_0}$，其中 V_0 是在相对静止系中观测到的电荷微元的体积。而一般的电荷密度和电流密度定义为 $\rho = \dfrac{Q}{V}, J = \rho u$，显然：

$$\rho = \rho_0 \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \quad J = \rho_0 \frac{u}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$$

ρ_0 是换系不变量，因此我们可以构造四维电流密度矢量 $J^\mu - (c\rho, J_x, J_y, J_z)$。此时，原本的电流连续性方程 $\nabla \cdot J = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$ 直接变成：

$$\frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = 0$$

麦克斯韦方程组被写成两条：

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \mu_0 J^\mu \quad \frac{\partial G^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0$$

可以验证，第一条方程代表着 $\nabla \cdot E = \dfrac{1}{\epsilon_0}\rho$ 和 $\nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial E}{\partial t}$，第二条则代表着 $\nabla \cdot B = 0$ 和 $\nabla \times E = -\dfrac{\partial B}{\partial t}$。
容易验证，作用在粒子上的力可以写成：

$$K^\mu = q\eta_\nu F^{\mu\nu}$$

写成矢量式，就是：

$$K = \frac{q}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}[E + (u \times B)]$$

最后，我们可以构建四维势：$A^\mu = \left(\dfrac{V}{c}, A_x, A_y, A_z\right)$。可以验证，电磁场张量被写为：

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}$$

同样我们可以表示出 $G^{\mu\nu}$，可以验证，$\dfrac{\partial G^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}=0$ 在这个写法下自动成立，因此我们只需关注第一条方程：

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial A^\nu}{\partial x^\nu}\right)-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu}\right)=\mu_0 J^\mu \quad (\star)$$

从 $F^{\mu\nu}$ 的表达式可以看出，我们在 A^μ 上增加一个标量场的梯度，是不改变电磁场的。因此，我们可以进行规范变换。考虑洛伦兹规范：

$$\nabla\cdot A=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}$$

在现在的表示方法下被写为 $\dfrac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}=0$，那么在洛伦兹规范下，$(\star)$ 式被化简为：

$$\Box^2 A^\mu=-\mu_0 J^\mu \quad \Box^2=\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}=\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

这就是用四维矢量形式表达的麦克斯韦方程，也就是它最优雅的形式！至此，经典电动力学达到了它的顶峰。