电动力学PART 4

#ElectroDynamics

库伦规范和洛伦兹规范

在静电场、静磁场的情况下，我们给出 $\rho(r), J(r)$，库仑定律和毕奥-萨伐尔定律就可以给出 $E(r), B(r)$ 的分布.。但是如果给定 $\rho(r,t), J(r,t)$，我们如何计算 $E(r,t)$ 和 $B(r,t)$ 呢？我们仍然考虑能不能找到电场和磁场的某种势。现在，电场有旋度，因此我们不能将其写成某个量的梯度的形式，但是磁场依然无源，因此：

$$B = \nabla \times A$$

使用麦克斯韦方程组：

$$\nabla \times E = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times A) \Rightarrow \nabla \times \left(E + \frac{\partial A}{\partial t}\right) = 0$$

因此，我们可以这样写：

$$E = -\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t}$$

将这个式子代入麦克斯韦方程组 （计算 E 的散度），我们得到：

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot A) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho \quad (\star)$$

这替换了原来的泊松方程。此时，我们还有一条方程没用，我们计算 B 的旋度：

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \mu_0 J - \mu_0\epsilon_0 \nabla\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

使用 $\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$，可以将上式写成：

$$\left(\nabla^2 A - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\right) - \nabla\left(\nabla \cdot A + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}\right) = 0 \quad (\star\star)$$

在推导 $(\star)$ 和 $(\star\star)$ 式的过程中，我们使用了全部的四条方程，因此这两个式子已经包含了麦克斯韦方程的全部信息。这两条方程中的场已经完全消去，完全是关于 V 和 A

的方程。虽然它的形式很丑陋，但是我们已经稍微化简了问题——将六个分量的求解化简为四个分量的求解。

我们发现，上面的方程并不唯一确定 V 和 A，假设我们有两组势 (V, A) 和 (V', A')，它们之间有关系：$A' = A + \alpha, V' = V + \beta$。由于我们需要 $\nabla \times \alpha = 0$，那么 α 需要是某个标量的梯度：$\alpha = \nabla\lambda$。在静电场中，V 可以差一个常数（这时两个 V 给出相同的场），但是现在 $E = -\nabla V - \dfrac{\partial A}{\partial t}$，我们不能这么干。为了让新的势也给出相同的场，我们有：

$$\nabla\beta + \frac{\partial\alpha}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla\left(\beta + \frac{\partial\lambda}{\partial t}\right) = 0$$

因此，括号内的东西应该与位置无关。我们可以将 β 表达为：

$$\beta = -\frac{\partial\lambda}{\partial t} + k(t)$$

这样括号内只剩下一个 $k(t)$，只与时间有关。为了方便写，我们一般将 λ 加上 $\int_0^t k(t')dt'$ 变成新的 λ，从而将 $k(t)$ 吸收掉。而这一项显然不影响 λ 的梯度（因为这一项只与时间有关）。因此，我们有：

$$A' = A + \nabla\lambda \quad V' = V - \frac{\partial\lambda}{\partial t}$$

我们将这样的变换称为"规范变换"。

前面学习静磁学的时候我们知道，只要设置 $\nabla \cdot A = 0$，很多问题都能迎刃而解（比如，磁矢势会很容易求出）。但是现在，我们可能需要根据问题选择 V 和 A 的最佳形式。接下来我们介绍两种最常见的情况。

库伦规范：正如我们之前做的一样，设置 $\nabla \cdot A = 0$，那么 $(\star)$ 方程变成：

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

这就是泊松方程，而之前我们已经获得了它的解：

$$V(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(r', t)}{\mathscr{r}} d\tau'$$

在库伦规范中，t 时刻的电势是由 t 时刻的电荷分布立刻确定的！注意：电势是一个不可测量的量，我们能测量的只有电场 E，而电场还与 A 有关。因此，并不会出现信息

超过光速传播之类的问题。库伦规范的优势是 V 非常好计算，作为代价，A 非常难以计算：

$$\nabla^2 A-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}=-\mu_0 J+\mu_0\epsilon_0\nabla\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)$$

洛伦兹规范：将磁矢势的散度设置为：$\nabla\cdot A=-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}$ 。这样的话，上面的两条方程改写为：

$$\nabla^2 A-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}=-\mu_0 J\quad \nabla^2 V-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=-\frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

我们闲杂记达朗贝尔算子：$\nabla^2-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\square^2$，那么麦克斯韦方程组被改写为：

$$\square^2 V=-\frac{1}{\epsilon_0}\rho\quad \square^2 A=-\mu_0 J$$

这个方程组可以被视为泊松方程的四维推广。在洛伦兹规范下，V 和 A 均满足非齐次的波动方程，因此电动力学的所有问题转化为求解这个方程的问题。

下面我们会把洛伦兹力也一并改写一下。考虑到：

$$F=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=q(E+v\times B)=q\left[-\nabla V-\frac{\partial A}{\partial t}+v\times(\nabla\times A)\right]$$

利用矢量分析公式可以改写为：

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=-q\left[\frac{\partial A}{\partial t}+(v\cdot\nabla)A+\nabla(V-v\cdot A)\right]$$

我们引用流体力学中的一个概念，$\frac{\partial A}{\partial t}+(v\cdot\nabla)A$ 称为 A 的物质导数，写作 $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$，代表了随着电荷运动，电荷所在处 A 随着时间的变化：

$$dA=A(r+vdt,t+dt)-A(r,t)=\sum_{i=x,y,z}\frac{\partial A}{\partial i}v_i dt+\frac{\partial A}{\partial t}dt$$

此时，洛伦兹力公式可以被改写成：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p+qA)=-\nabla[q(V-v\cdot A)]$$

类比一个一般的运动方程 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=-\nabla U$，现在新的动量 $p_{can}=p+qA$，被称为正则动量，新的势能则是 $q(V-v\cdot A)$。

推迟势

现在，我们考虑洛伦兹规范下的电势和磁矢势怎么写。一个直观感受是：当源发生变化后，信息以光速传播，推迟一段时间 $\dfrac{\mathscr{r}}{c}$ 到达场点。（注意：现在我们关于 V,A 的方程是对称的，要想使得 E,B 是因果的，我们的 V,A 都得推迟相同的时间）于是我们猜测，V 和 A 应当满足以下的形式：

$$V(r,t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(r',t_r)}{\mathscr{r}}d\tau'\quad A(r,t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{J(r',t_r)}{\mathscr{r}}d\tau'\quad t_r=t-\frac{\mathscr{r}}{c}$$

现在我们要证明这个形式是正确的。我们要证明这个表达式满足非齐次波动方程和洛伦兹规范的条件。于是我们开始验证上面的 V，也就需要求出其二阶导数：

$$\nabla V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[(\nabla\rho)\frac{1}{\mathscr{r}}+\rho\nabla\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)\right]d\tau'$$

其中，$\nabla\rho=\dot{\rho}\nabla t_r=-\dfrac{1}{c}\dot{\rho}\nabla\mathscr{r}$ ，于是我们得到：

$$\nabla V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[-\frac{\dot{\rho}}{c}\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}}-\rho\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\right]d\tau'$$

继续向下求导：

$$\nabla^2V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left\{-\frac{1}{c}\left[\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}}\cdot(\nabla\dot{\rho})+\dot{\rho}\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\mathscr{r}}}{r}\right)\right]-\left[\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\cdot(\nabla\rho)+\rho\nabla\left(\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\right)\right]\right\}d\tau'$$

得到：

$$\nabla^2V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{\rho}}{\mathscr{r}}-4\pi\rho\delta^3(\mathscr{r})\right]d\tau'=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2V}{\partial t}-\frac{1}{\epsilon_0}\rho(r,t)$$

（注意这里需要将前面的 V 直接代入。这没有逻辑问题，因为我们就是将猜测的 V 的表达式作为已知条件，验证麦克斯韦方程是否成立。）我们就完成了 V 的证明。关于 A 的证明此处不再写。提请注意：如果取 $t_r=t+\dfrac{\mathscr{r}}{c}$，也可以完成证明。但是这显然违反因果律。

Jefimenko 方程给出了电场和磁场的显式表达式。在前面，我们已经计算过 ∇V ，现在我们又知道：

$$\frac{\partial A}{\partial t}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\dot{J}}{\mathscr{r}}d\tau'$$

那么直接得到：

$$E(r,t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{\rho(r',t_r)}{\mathscr{r}^2}\hat{\mathscr{r}}+\frac{\dot{\rho}(r',t_r)}{c\mathscr{r}}\hat{\mathscr{r}}-\frac{\dot{J}(r',t_r)}{c^2\mathscr{r}}\right]d\tau'$$

计算 A 的旋度：

$$\nabla\times A=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\frac{1}{\mathscr{r}}(\nabla\times J)-J\times\nabla\left(\frac{1}{\mathscr{r}}\right)\right]d\tau'$$

将 $\nabla\times J$ 拆开成三个方向计算：

$$(\nabla\times J)_x=\frac{\partial J_z}{\partial y}-\frac{\partial J_y}{\partial z}$$

注意到其中：

$$\frac{\partial J_z}{\partial y}=\dot{J}_z\frac{\partial t_r}{\partial y}=-\frac{1}{c}\dot{J}_z\frac{\partial \mathscr{r}}{\partial y}\Rightarrow(\nabla\times J)_x=-\frac{1}{c}\left(\dot{J}_z\frac{\partial \mathscr{r}}{\partial y}-\dot{J}_y\frac{\partial \mathscr{r}}{\partial z}\right)=\frac{1}{c}[\dot{J}\times(\nabla\mathscr{r})]_x$$

从而 $\nabla\times J=\dfrac{1}{c}\dot{J}\times\mathscr{r}$。磁场的显式表达式为：

$$B(r,t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\frac{J(r',t_r)}{\mathscr{r}^2}+\frac{\dot{J}(r',t_r)}{c\mathscr{r}}\right]\times\hat{\mathscr{r}}d\tau'$$

我们可以看出，电场与 $\rho,\dot{\rho},\dot{J}$ 有关，而磁场与 $J,\dot{J}$ 有关。这个方程实际上不常用，因为求出推迟势再进行微分经常是一个更简单的做法。

运动粒子的电磁场

我们现在计算一个运动的粒子的电磁场。比如我们计算电场：

$$V(r,t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(r',t_r)}{\mathscr{r}}d\tau'$$

看起来，对于一个点电荷，我们可以直接将其写为 $\frac{q}{4\pi\epsilon_0\mathscr{r}}$ ，其中 $\mathscr{r}$ 是推迟过的位置。但很不幸这是错误的。原因是：

$$\int\rho(r,t_r)d\tau' = \frac{q}{1-\hat{\mathscr{r}}\cdot v/c}$$

这是因为推迟项的存在，因此在场点上看起来，带有电荷的区域会在运动方向上被"拉长"一个系数倍（更远的地方产生的影响，会在更晚的时候到达场点）

现在，我们用 $w(t_r)$ 记点电荷推迟过的位置，令 $\mathscr{r} = r - w(t_r)$（显然，在这个问题里面，只有推迟过的位置是有意义的），那么我们可以得到：

$$V(r,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{(\mathscr{r}c-\mathscr{r}\cdot v)} \quad A(r,t) = \frac{v}{c^2}V(r,t)$$

注意这里的 v 也是推迟过的速度。从这个势中，我们可以显式计算出电场、磁场（这里计算量逆天，我们直接给出结果）：

$$E(r,t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathscr{r}}{(\mathscr{r}\cdot u)^3}[(c^2-v^2)u+\mathscr{r}\times(u\times a)] \quad B(r,t) = \frac{1}{c}\hat{\mathscr{r}}\times E(r,t)$$

特别地，对于匀速运动的带电粒子，令 $R = r - vt$，其中 r 是粒子现在的位置，则 R 是推迟过的位置，那么：

$$E(r,t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\frac{\hat{R}}{R^2} \quad B = \frac{1}{c^2}(v\times E)$$