电动力学PART 2

#ElectroDynamics

电磁场的能量

我们接触到的第一条守恒定律是电荷守恒（也称为连续性方程）：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot J$$

注意，我们推出麦克斯韦方程组的时候也使用了这条守恒律。因此这不是一个孤立的假设，而是电动力学的基本规律之一。

在之前，我们已经学习过电磁场的能量密度：

$$u = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2\right)$$

现在我们的问题是：我们有电荷 q，在外场 E, B 下以速度 v 运动了一段时间 dt，问外场对它做的功是多少？显然：

$$F \cdot dl = q(E + v \times B) \cdot vdt = qE \cdot vdt$$

现在我们考虑一个体积 V 内的电荷：

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \int_V qE \cdot vd\tau = \int_V (E \cdot J) d\tau$$

这是外场在 dt 时间内对区域 V 内的电荷做的功，或者说，是外界"送进"这个区域内的能量。我们希望这个结果中只包含 E, B，那么我们使用 Maxwell 方程消去 J：

$$E \cdot J = \frac{1}{\mu_0} E \cdot (\nabla \times B) - \epsilon_0 E \cdot \frac{\partial E}{\partial t}$$

改写其中的一项：

$$E \cdot (\nabla \times B) = -B \cdot \frac{\partial B}{\partial t} - E \cdot (\nabla \times B)$$

并且凑一下全微分，上面的式子就会变成：

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)d\tau - \frac{1}{\mu_0}\oint_S (E \times B)\cdot da$$

这个式子被称为坡印廷定理。它的物理意义是：单位时间内对体积 V 内电荷做的功，等于体积 V 内电磁场能量的减少，减去从体积 V 内流出的能量。因此，我们可以给出单位时间内、单位面积上被电磁场携带的能量（能流密度矢量）：

$$S = \frac{1}{\mu_0}(E \times B)$$

对于我们所关心的区域中没有电荷的情况，坡印廷定理可以退化。我们也可以写出它的另一种写法：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot S$$

这是能量的连续性方程。

电磁场的动量

如果将两个运动的电荷限制在轨道上，一个在 x 轴上运动，而另一个在 y 轴上运动，我们会发现二者之间的作用力并不是等大反向的。这违反了牛顿第三定律（或者说，动量守恒）吗？这是因为电磁场也有动量。只有将电磁场的动量和粒子的动量加在一起，我们才能得到系统（守恒的）总动量。

为了研究这一点，我们计算体积 V 中电荷在外场 E, B 下所受的力：

$$F = \int_V (\rho E + J \times B)d\tau$$

考虑作用在单位体积上的力，同样，我们希望将 ρ 和 J 消去。于是我们有：

$$f = \epsilon_0(\nabla \cdot E)E + \left(\frac{1}{\mu_0}\nabla \times B - \epsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}\right) \times B$$

利用偏导数的运算规则和麦克斯韦方程组，上式中的一部分可以被改写为：

$$\frac{\partial E}{\partial t} \times B = \frac{\partial}{\partial t}(E \times B) + E \times (\nabla \times E)$$

那么：

$$f=\epsilon_0[(\nabla\cdot E)E-E\times(\nabla\times E)]-\frac{1}{\mu_0}[B\times(\nabla\times B)]-\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(E\times B)$$

利用运算规则：

$$\nabla(E^2)=2(E\cdot\nabla)E+2E\times(\nabla\times E)$$

处理 $E\times(\nabla\times E)$ 和 $B\times(\nabla\times B)$，并且向式子里面添加一个等于 0 的项 $(\nabla\cdot B)B$，上式就变成：

$$f=\epsilon_0[(\nabla\cdot E)E+(E\cdot\nabla)E]+\frac{1}{\mu_0}[(\nabla\cdot B)B+(B\cdot\nabla)B]-\frac{1}{2}\nabla\left(\epsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)-\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(E$$

这个式子太繁杂，我们使用麦克斯韦应力张量来简化书写，令：

$$T_{ij}=\epsilon_0\left(E_iE_j-\frac{1}{2}\delta_{ij}E^2\right)+\frac{1}{\mu_0}\left(B_iB_j-\frac{1}{2}\delta_{ij}B^2\right)$$

上式可以被简化写为：

$$f=\nabla\cdot T-\epsilon_0\mu_0\frac{\partial S}{\partial t}$$

因此，作用在体积 V 内的力总共就是：

$$F=\oint_S T\cdot da-\epsilon_0\mu_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V Sd\tau$$

对于静电场、静磁场的情况，第二项为 0.

我们知道，牛顿定律实际上说的是 $F=\dfrac{\mathrm{d}p_{mech}}{\mathrm{d}t}$，那么上面的式子可以写成：

$$\frac{\mathrm{d}p_{mech}}{\mathrm{d}t}=\oint_S T\cdot da-\epsilon_0\mu_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V Sd\tau$$

式子右边的第二项是储存在场中的动量，也就是说，场的动量密度是：

$$g=\mu_0\epsilon_0S$$

而单位时间内被运出区域 V 的动量就是第一项。如果区域 V 内的机械动量 p_{mech} 不变，我们就得到了动量的连续性方程：

$$\frac{\partial g}{\partial t}=\nabla\cdot T$$

此外，我们自然地得到角动量密度：

$$l = r \times g = \epsilon_0[r \times (E \times B)]$$