电动力学PART 1

#ElectroDynamics

静电场

静电场的散度和旋度

我们现在考虑一些问题，我们有一些电荷 $q_1, q_2, \cdots$，我们将这些叫做“场源电荷”，我们现在考虑它们加在一个试探电荷 Q 上的力。这个问题可以使用**叠加原理**求解（注意，叠加原理不是一个逻辑上的事实，而是实验上得到的结果）。假如这些电荷是运动的，那么这个问题并不是那么好解决，我们需要考虑到电荷的速度和加速度。并且，电磁波所带的“信息”以光速传播，这些影响也要考虑。我们现在还不能解决这个问题，在这一章中，我们只解决场源电荷是固定的这一种情况。

我们首先介绍库仑定律，这是由实验保证的：

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{\mathscr{r}^2}\hat{\mathscr{r}}$$

我们定义试探电荷受到的力 $F = QE$，这里的 E 被称为电场，那么根据叠加定理：

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{\mathscr{r}_i^2}\hat{\mathscr{r}}_i$$

对于电荷在线上、面上、空间上分布的情形，我们只要知道 $dq = \lambda dl' = \sigma da' = \rho d\tau'$ 即可，例如，对于在空间中有分布的电荷，我们如下求出电场：

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(r')}{\mathscr{r}^2}\hat{\mathscr{r}}d\tau'$$

通过一些很直观的模型，我们可以发现，穿过一个闭合曲面的电通量 $\oint E\cdot da$ 是对曲面内电荷多少的衡量，例如，我们放一个电荷在原点，我们发现任意包围原点的球面上穿出的通量都是 $\frac{q}{\epsilon_0}$，这就是电场高斯定理的实质。仍然是通过基于一些直观模型的推理（例如使用电场线来表示电场），我们可以发现穿过任意曲面的通量都是 $\frac{q}{\epsilon_0}$，现在假设曲面内有许多电荷，那么穿过曲面的通量是这些电荷各自产生通量的叠加：

$$\oint E \cdot ad = \sum_i \left(\oint E_i \cdot da\right) = \sum_i \left(\frac{1}{\epsilon_0} q_i\right)$$

那么这就是静电场高斯定理的数学表达：

$$\oint E \cdot da = \frac{1}{\epsilon} Q_{\text{enclosed}}$$

也就是说，高斯定理实际上就是通过库仑定律和叠加原理做出来的，其实并没有提供什么新东西 注意到 $Q_{\text{enclosed}} = \int \rho d\tau$，与散度定理对比可以直接得到电磁场的散度：

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

我们可以从前面提出的电场的计算式上验证这一结果的正确性。注意到：

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int 4\pi\delta^3(r - r')\rho(r')d\tau' = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(r)$$

注意这里的积分实际上是取遍所有的源点 r'，Delta 函数的筛选性质只选出了 $r = r'$ 处的值。
高斯定理可以用于求解有强对称性的静电场，主要包括球对称、柱对称和平面对称的情况。运用高斯定律和叠加原理可以让我们灵活地求解电场。

电场力是一个有心力，我们很容易知道任意的有心力都是保守力。对于点电荷产生的场，我们很容易计算得到：

$$\int_a^b E \cdot dl = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r_b} - \frac{q}{r_a}\right)$$

那么根据旋度定理，容易知道：

$$\oint E \cdot dl = 0 \Rightarrow \nabla \times E = 0$$

根据电场的叠加原理，我们很容易证明任何静电场的散度都为 0.

静电场的势与能量

在上一节中，我们提到过，静电场是无旋的。这个特性可以让我们化简许多有关静电场的问题。其中，最重要的化简手段就是将电场写为某个标量的梯度。我们首先来证明这一点。

我们之前已经提到过，$\int E \cdot dl$ 这个积分仅仅与积分的起止点有关而与路径无关。因此我们将 $\mathcal{O}$ 定为某个参考点，定义一个函数由从 $\mathcal{O}$ 到 r 的积分决定，这个函数被称为电势：

$$V(r) = -\int_{\mathcal{O}}^{r} E \cdot dl$$

注意到两点间的电势差：

$$V(b) - V(a) = -\int_{a}^{b} E \cdot dl = \int_{a}^{b} (\nabla V) \cdot dl$$

那么显然就有：

$$E = -\nabla V$$

我们可以对于这个定义做出一些讨论。例如：

- 为什么一个标量函数就可以包含电场的三个分量的信息？这是因为电场的旋度为 0，从而自然地提供了约束。
- 电势的零点可以任意选择。在大部分问题中（只要问题中涉及的电荷没有延伸至无穷远处），我们经常自然地将无穷远处选作电势的零点。在现实生活中，不会有电荷延伸至无穷远，因此我们完全可以将无穷远处视为零点。
- 电势遵循叠加定理。

从前面电场与电势的关系以及电场的散度表达中，我们可以直接推出泊松方程：

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

在没有电荷的地方，上述方程退化为 $\nabla^2 V = 0$，这被称为拉普拉斯方程。至于

$$\nabla \times (-\nabla V) = 0$$

则没有提供新的东西。因为我们已经知道梯度的散度必须为 0。

现在我们已经发现一个有趣的事实。如果我们希望计算电场，实际上先计算电势，再计算电场是更方便的。现在我们希望从电荷的分布中推导出电势的分布，我们逐步地解决这个问题。首先，假如我们将无穷远处选择为电势的零点，那么一个点电荷的电势是：

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

那么，对于在空间中任意分布的电荷（当然，这些电荷不能延伸至无穷远处）有：

$$V(r)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(r')}{r}d\tau'$$

这实际上是泊松方程的一个解。

在讨论完电势以后，我们希望讨论一下电场和电势在边界上的变化情况。例如，如果一个界面上有电荷面密度 σ，那么界面两侧的电场必然是不连续的。对于法向电场，我们可以使用高斯定理求解：我们只要选择一个紧贴着界面的高斯面，即可得到：

$$E_{1,n}-E_{2,n}=\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

对于切向电场，我们只需要取一个穿越界面两侧的环，利用 $\oint E\cdot dl=0$，立刻得到：

$$E_{1,t}=E_{2,t}$$

将以上两式总结，我们得到：

$$E_1-E_2=\frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n}$$

利用电势差的定义式，我们很容易发现电势在界面上是连续的，但是电势的梯度一定不连续，显然有：

$$\nabla V_1-\nabla V_2=-\frac{1}{\epsilon_0}\sigma\hat{n}$$

或者可以写成一个简单的表达方式（上式两侧点一下 $\hat{n}$ 即可）：

$$\frac{\partial V_1}{\partial n}-\frac{\partial V_2}{\partial n}=-\frac{1}{\epsilon_0}\sigma\quad(\frac{\partial V}{\partial n}=\nabla V\cdot\hat{n})$$

首先考虑一个很简单的事实：将一个电量为 Q 的点电荷从 a 点移动到 b 点，需要做多少功。显然是：

$$W=-Q\int_a^b E\cdot dl=Q(V(b)-V(a))$$

那么，b、a 两点的电势差实际上是将单位电量的点电荷从 a 点搬运到 b 点需要做的功。如果将一个点电荷从无穷远处移动至 r 处，需要做功 $W=QV(r)$。

我们现在考虑建立起一个离散电荷体系需要多少能量。假定我们先移动一个 q_1 电荷到某个位置，再移动 q_2 电荷到某个位置。那么，在移动 q_1 的时候我们不需要付出任何

的能量，但是在移动 q_2 的时候，我们需要消耗能量 $q_2V_1(r_2)$，也就是：

$$W_2=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}q_2\left(\frac{q_1}{\mathscr{r}_{12}}\right)$$

我们可以继续移动第 3，4，或者更多个电荷，最终我们可以计算出消耗的总能量：

$$W=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n}\frac{q_iq_j}{\mathscr{r}_{ij}}$$

在这个情况下，重复的 (i,j) 对只被计算了一次，在第二个求和号上有 $j>i$ 的限制。我们现在可以改写上式，使得重复的 (i,j) 对被计算两次，也就是取消第二个求和号上的限制。相应地，我们应该给上式乘以系数 $\frac{1}{2}$，也就是说，我们所需的总能量（系统的总电势能）为：

$$W=\frac{1}{8\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{q_iq_j}{\mathscr{r}_{ij}}$$

我们将 q_i 提出来：

$$W=\frac{1}{2}\sum_{i}q_i\left(\sum_{i\neq j}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_j}{\mathscr{r}_{ij}}\right)\Rightarrow W=\frac{1}{2}\sum_{i}q_iV(r_i)$$

这就是离散的点电荷系统内储存的能量的一般计算式。

我们再考虑一个连续电荷体系。此时，上式化为：

$$W=\frac{1}{2}\int\rho V d\tau$$

我们现在希望将上式仅仅使用 E 表示。利用高斯定理：

$$\rho=\epsilon_0\nabla\cdot E\Rightarrow W=\frac{\epsilon_0}{2}\int(\nabla\cdot E)Vd\tau$$

我们进行如下的推导，利用矢量分析公式：

$$\nabla\cdot(VE)=V(\nabla\cdot E)+E\cdot(\nabla V)$$

利用散度定理（这个操作就像是分部积分）：

$$\int_V\nabla\cdot(VE)\,d\tau=\oint_S VE\,da=\int_V V(\nabla\cdot E)\,d\tau+\int_V E\cdot(\nabla V)\,d\tau$$

我们就得到了：

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\int_S VE\,da - \int_V E\cdot(\nabla V)\,d\tau\right) = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\int_S VE\,da + \int_V E^2\,d\tau\right)$$

上式的积分区域本来应当是包含所有电荷的区域，但是一个更简单的方式是直接在全空间积分，此时，面积分的一项变成 0。于是，我们给出了计算连续电荷分布的系统的能量公式：

$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int E^2\,d\tau$$

我们仍然对这里推导出的电势做一些讨论：

- 为什么 $\sum_i q_i V_i$ 可能是负的，但是 $\int E^2 d\tau$ 一定为正？这是因为第一个式子中没有考虑点电荷形成的过程，更没有计及点电荷的能量（经过计算可知，一个点电荷的内的能量实际上是无限的），我们只是将点电荷移动到一起。在写出 $\int \rho V d\tau$ 时，r 处的电荷很少，它对电势的贡献为 0. 因此这里的 V 是所有电荷产生的电势，而没有扣除 r 处的一点点电荷。
- 我们现阶段的知识无法说明电势是储存在电场里还是电荷里。我们可以提前说明结论：这个能量储存在电场里，能量密度就是我们上文中计算得到的 $\frac{\epsilon_0}{2}E^2$
- 显然，能量密度正比于 E^2，那么电场能量就不满足叠加定理。

导体的性质

我们首先讨论理想导体的一些性质：

- 导体内的电场强度为 0。如果不为 0，导体中的载流子将不断移动，直到导体内电场强度为 0 为止。
- 导体内的电荷密度为 0。这是由高斯定理显然得到的。
- 所有电荷分布在表面。（我们暂不给出详细证明，这可以从能量极小的角度来理解。但是，注意这一般只在三维中成立。）
- 导体是等势体。
- 导体表面的电场垂直于导体，否则分布在导体表面的电荷会移动。

以上性质会导致导体附近存在电荷时，导体上出现“感应电荷”，也会导致导体存在“静电屏蔽”效应：若导体内有空腔，那么导体外的电场不会对空腔内的电场产生任何的影响。（但是，很显然的一件事情是空腔内的电荷会反映到导体表面上。）

显然，根据高斯定理和导体的以上性质，假如导体表面某处的电荷面密度为 σ，那么导体表面的电场强度为：

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n}$$

现在我们来考虑导体表面的电荷受到的力。这时候，我们只考虑导体表面的一个微元，我们将这个微元产生的电场记为 E_p，其余部分的电场记为 E_o，那么此处导体表面的电场为：

$$E = E_p + E_o$$

作用在这一个微元上的力显然是由 E_o 引起的，那么我们现在计算 E_o。根据高斯定理显然有：

$$E_1 = E_o + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad E_2 = E_o - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

那么我们就知道了：

$$E_o = \frac{1}{2}(E_1 + E_2)$$

那么，单位面积上受力就是 $f = \frac{1}{2\epsilon_0}\sigma^2\hat{n}$

最后，假设我们找到两块导体，上面分别分布 $+Q, -Q$ 的电荷。此时，若将 Q 翻倍，那么空间中 E 会翻倍，两块导体之间的电势差 V 也会翻倍。我们将：

$$C = \frac{Q}{V}$$

定义为导体的电容。有些时候，电容器中只有一个导体，此时的另一个导体就是我们设想的无穷大球面。
为了充满一个电容，我们会将正电荷从负极移动到正极。假设某个时候正极所带的电荷为 q，那么要移动 dq 的电荷，就需要做功 $\frac{q}{C}dq$。从而将电容从 $q = 0$ 充电到 $q = Q$ 所需的能量可以通过积分得到：$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$，也就是 $W = \frac{1}{2}CV^2$。这就是电容器储存的能量。

拉普拉斯方程

静电学的基本目的是：给出空间中的电荷分布，我们希望求出空间中场的分布。这可以通过库仑定律实现，然而，这通常很难计算。因此，一种更可行的分布是先计算势。我们可以利用之前提到过的泊松方程：

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

很多时候，我们其实只关系那些没有电荷分布的部分，电势（场）是怎么样的。这个时候，拉普拉斯方程退化为泊松方程：

$$\nabla^2 V = 0$$

一维下的方程非常简单：

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

其通解显然为：

$$V(x) = mx + b$$

它有两条显然的性质：

- $V(x)$ 是 $V(x+a)$ 和 $V(x-a)$ 的平均值
- $V(x)$ 没有极值

对于二维拉普拉斯方程，我们有类似的性质：

$$V(x,y) = \frac{1}{2\pi R}\oint_{\text{circle}} V dl$$

并且 V 没有极大值和极小值。对于三维同样也是成立的。这可以通过简单地对一个点电荷的情况计算，再运用电势的叠加定理得到证明。

从一维的情况我们已经发现：某些适当的条件可以确定 Laplace 方程的解（例如两个端点处的电势值），而某些条件却不行（例如两个端点处电势的导数）。我们现在希望对于一般的、三维的 Laplace 方程找到定解所需的边界条件，这样的条件则被称为唯一性定理。

第一唯一性定理：Laplace 方程在区域 V 上的解由其边界上的电势唯一确定。这容易证明：假设区域内可以有两套电势 V_1 和 V_2，记它们的差值是 V_3，那么 V_3 显然满足 Laplace 方程，且 V_3 在边界上为 0，由于 V_3 无极大值、极小值的性质，它只能在区域

V 上全为零。得证。这个定理显然可以被推广到：区域 V 内的电势仅由区域 V 内部的电荷和边界上的电势唯一确定。

第二唯一性定理：若区域 V 中有导体，每个导体上的电荷总量已知，区域内的电荷密度 ρ 已知，则电势被唯一确定。这个证明稍难：
设有两个电场满足所述条件，由高斯定理：

$$\nabla \cdot E_1 = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \qquad \nabla \cdot E_2 = \frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

我们可以对每个导体的外表面使用高斯定理：

$$\oint E_1 \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0}Q_i \qquad \oint E_2 \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0}Q_i$$

同理，对于外表面（可至无穷远处）也能写出上式。现在，我们检查两个场的差值，它显然满足：

$$\nabla \cdot E_3 = 0 \qquad \oint E_3 \cdot dS = 0$$

其中第二个积分是对任意表面成立的。

现在我们知道，对于每个导体的表面，其电势 V_3 是一个常数。因此使用一个 trick：

$$\nabla \cdot (V_3 E_3) = V_3(\nabla \cdot E_3) + E_3 \cdot (\nabla V_3) = -(E_3)^2$$

另外，我们有：

$$\int \nabla \cdot (V_3 E_3) d\tau = -\int (E_3)^2 d\tau = \oint_S V_3 E_3 \cdot da$$

这里的 S 是取遍所有表面的。而我们知道，在任意一个表面上都有 $\oint E_3 \cdot da = 0$，那么我们立刻有：

$$\int (E_3)^2 d\tau = 0$$

从而得证。（这个定理的证明，我认为更多是数学技巧，将 E_3 的面积分为 0 转换为 E_3^2 的体积分为 0）.

镜像法、分离变量法

镜像法里面可能有坑的一点就是在计算电势能的地方。注意不要使用原电荷和镜像电荷组成的体系直接计算电势能，否则可能差出一个常数倍。

分离变量法的想法很简单：我们希望将电势拆成几项相乘的形式，每一项只与一个坐标有关。通过这种方式，我们通常可以得到 Laplace 方程的一组解，其中的每一个解都不符合边界条件，但我们期望它们的线性组合符合边界条件（由于 Laplace 方程是线性的，所以我们可以这样做）

在直角坐标系下的分离变量非常简单，但是在球坐标系下（假设问题与 ϕ 无关），我们会得到两个常微分方程，其中，关于 R 的可以被简单地求解：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)=l(l+1)R \Rightarrow R(r)=Ar^l+\frac{B}{r^{l+1}}$$

但是另一个关于 Θ 的方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)=-l(l+1)\sin\theta\cdot\Theta$$

却不好求解。它的解是勒让德多项式：

$$\Theta(\theta)=P_l(\cos\theta)\quad P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l(x^2-1)^l$$

另外，这个关于 Θ 的方程显然应该有两个通解（因为它是二阶的），但是勒让德多项式只提供了一个通解。我们直接说明另一个通解会在 $\theta=0,\theta=\frac{\pi}{2}$ 处爆掉，所以我们是不管另一个通解的。一个例子是 $\Theta(\theta)=\ln\left(\tan\frac{\pi}{2}\right)$。
注意：勒让德多项式仍然是一组完备且正交的多项式，因此我们可以使用求 Fourier 级数类似的技巧来计算系数。但是我们通常很难处理勒让德多项式的积分，因此对于一般的情况，我们可以将答案"猜出来"。

多极展开

有时候，我们希望估计我们的电荷体系在远场下产生的电场和电势，在最粗糙的近似下，我们显然可以使用点电荷来估计，其电势衰减速度是 $\frac{1}{r}$；再更加粗糙的情况下，我们则可以使用电偶极子，它的电势衰减速度是 $\frac{1}{r^2}$，因此，在远场条件下，它产生的影响远远小于点电荷。我们可以无限地这样做下去，从而不断获得更精确的近似。我们考虑一个通用的情形：电势是：

$$V(r)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{1}{\mathscr{r}}\rho(r')dr'$$

这里 r 是场点，而 r' 是源点。使用余弦定理计算场点到源点的距离：

$$\mathscr{r}^2=r^2+(r')^2-2rr'\cos\alpha=r^2\left[1+\left(\frac{r'}{r}\right)^2-2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\alpha\right]$$

或者说，$\mathscr{r}=r\sqrt{1+\epsilon}$，而 $\epsilon=\left(\frac{r'}{r}\right)\left(\frac{r'}{r}-2\cos\alpha\right)$，我们可以将 $\frac{1}{\mathscr{r}}$ 展开，展开并整理的结果是：

$$\frac{1}{\mathscr{r}}=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^nP_n(\cos\alpha)$$

回代，我们就可以得到电势的表达式。

具体来看一下：最主要的贡献项是

$$V_0(r)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}$$

第二项则是：

$$V_1(r)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cdot r}{r^2}$$

其中

$$p=\int r'\rho(r')d\tau'$$

像是 ρ 的一阶矩。因此这一项被称为"电偶极矩"。对于一系列的点电荷，电偶极矩可以写为：

$$p=\sum q_ir_i'$$

显然，Q 不会随着坐标原点的变化而变化；但是，（计算可知）如果 $Q\neq0$，那么电偶极矩 p 是会随着坐标原点变化的！容易计算得到电偶极子的电场是：

$$E(r,\theta)=\frac{p}{4\pi\epsilon_0r^3}(2\cos\theta\hat{r}+\sin\theta\hat{\theta})$$

静磁场

洛伦兹力

我们显然需要通过场与物质的相互作用来得知场的存在，对于磁场：

$$F = Q(v \times B)$$

容易立刻推导得到，作用在导线上的安培力是：

$$F = I \int dl \times B$$

当电流流过一个面的时候，我们需要使用"面电流密度"来描述它，这定义为在垂直于电流方向的单位长度上流过的电流，也可以写为：

$$K = \sigma v$$

对于三维的情形也是类似的。电流密度是 $J = \rho v$。

那么，考虑一个体积 V，其边界为 S。显然有：

$$\oint_S J \cdot da = \int_V (\nabla \cdot J) d\tau$$

由于电荷守恒，我们立刻得到：

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

这被称为连续性方程。

毕奥-萨伐尔定律，磁场的散度和旋度

在静电场中，最简单的情形是研究一个点电荷，再使用叠加原理推广到一般的情况。而在静磁场中，我们最简单的研究对象是稳恒电流。稳恒电流产生的磁场由毕奥-萨伐尔定律给出：

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl' \times \hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}$$

这个积分是沿着电流线的方向积分的，其中 dl' 是电流线微元。同理，对于二维和三维的情形可做推广。

我们可以发现：以一条直导线为中心画一个圈，沿着圈积分得到：

$$\oint B \cdot dl = \mu_0 I$$

这个结果与圈的半径无关。实际上，这不必是个圈。注意到 $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{\phi}$ 和 $dl = ds\hat{s} + sd\phi\hat{\phi} + dz\hat{z}$，立刻可以知道：

$$\oint B \cdot dl = \mu_0 I$$

现在假设我们有一束导线，显然就会有：

$$\oint B \cdot dl = \mu_0 I_{enc} = \int J \cdot da$$

这个结论也被称之为安培环路定理。使用一步斯托克斯公式，我们就可以将其写成：

$$\nabla \times B = \mu_0 J$$

现在我们正式计算磁场的散度和旋度。根据三维空间中的毕奥-萨伐尔定律：

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{J(r') \times \hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2} d\tau'$$

将散度算子作用在右边一项上：

$$\nabla \cdot \left(J \times \frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\right) = \frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2} \cdot (\nabla \times J) - J \cdot \left(\nabla \times \frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\right)$$

很容易发现这两项都是 0（注意：这里的 J 是 r' 的函数，然而我们的求导是关于 r 的导数）。因此静磁场的散度为 0.

同样我们来求出旋度：

$$\nabla \times \left(J \times \frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\right) = J\left(\nabla \cdot \frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\right) - (J \cdot \nabla)\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}$$

在这里已经去除了所有包含 $\nabla \times J$ 的项。在第一项中，我们知道 $\nabla \cdot \dfrac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2} = 4\pi\delta^3(\mathscr{r})$，因此这一项的积分是：

$$\int J(r')\delta^3(r - r')d\tau' = \mu_0 J(r)$$

接下来我们看另一项。这里有一个技巧：我们将对 r 的导数换成对 r' 的导数，并且补一个负号：

$$-(J\cdot\nabla)\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}=(J\cdot\nabla')\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}$$

继续写下去，有：

$$(J\cdot\nabla')\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}=\nabla'\cdot\left[\frac{(r-r')}{\mathscr{r}^3}J\right]-\left(\frac{r-r'}{\mathscr{r}^3}\right)(\nabla'\cdot J)$$

注意到右边一项为 0（稳恒电流的定义）. 对于左边这一项积分：

$$\int_V\nabla'\cdot\left[\frac{r-r'}{\mathscr{r}^3}J\right]d\tau'=\oint_S\left[\frac{r-r'}{\mathscr{r}^3}J\right]da'$$

我们的积分是对全空间的，因此我们自然应该把 S 的边界放在无穷远处。我们不妨假设无穷远处没有电流，从而这一项积分为 0. 因此，我们就得到了静磁场的旋度：

$$\nabla\times B=\mu_0J(r)$$

磁矢势

由于磁场无源，我们可以将磁场写成某个矢量场 A 的旋度：

$$B=\nabla\times A$$

我们知道，梯度场是无旋的。因此我们其实可以在磁矢势上附加任意一个标量场的梯度。梯度场是有散的，所以一种简单的方式是构造一个梯度场加到磁矢势上，将磁矢势的散度调整到 0. 此时有：

$$\nabla\times B=\nabla(\nabla\cdot A)-\nabla^2A=\mu_0J(r)\Rightarrow\nabla^2A=-\mu_0J(r)$$

我们给出证明，以说明这确实是可行的。假设我们希望加上 λ 的梯度：

$$\nabla\cdot A=\nabla\cdot A_0+\nabla^2\lambda$$

仿照之前电势满足的泊松方程，我们立刻可以看出 λ 的解是：

$$\lambda=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\nabla\cdot A_0}{\mathscr{r}}d\tau'$$

在这种情况下，$\nabla^2A=-\mu_0J(r)$ 是三个泊松方程（在笛卡尔坐标系下，x,y,z 方向各有一个方程）。因此我们可以直接看出它的解：

$$A(r)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{J(r')}{\mathscr{r}}d\tau'$$

我们现在讨论一下磁场中的边界条件。显然，对于一个分布了电流的面，我们有：

$$B_1^n=B_2^n$$

所以我们主要关注平行于面的分量。利用磁场高斯定理显然得到：

$$B_1^t-B_2^t=\mu_0 K$$

如果我们将磁矢势取为没有散度的情形，那么其法向分量自然是连续的。而

$$\oint A\cdot dl=\int B\cdot da$$

保证了切向分量的连续。因此磁矢势在界面两侧（和电势一样）是连续的，但是，$\dfrac{\partial A}{\partial\hat{n}}$ 却不是连续的。

如同电场一样，磁场也可以被多极展开：

$$A(r)=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\sum\frac{1}{\mathscr{r}^{n+1}}\oint(r')^n P_n(\cos\alpha)dl'$$

注意到磁单极子的效应始终为 0，那么现在的首阶效应由磁偶极子提供：

$$A_{dip}(r)=\frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\oint(\hat{r}\cdot r')dl'=\frac{\mu_0}{r\pi}\frac{m\times\hat{r}}{r^2}$$

其中 $m=I\int da=Ia$ 称为磁偶极矩。其产生的磁场是：

$$B_{dip}(r)=\nabla\times A=\frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos\theta\hat{r}+\sin\theta\hat{\theta})$$

电动力学初步

电动势

我们考虑一个唯象模型：要使得电荷“动起来”，我们需要“推”电荷。实验中观测到，电流密度往往与这个“推力”成正比（这里所说的推力，是作用在单位电荷量上的推力）。我们将这个关系写为：

$$J=\sigma f$$

比例系数 σ 被称为电导率，而其倒数则被称为电阻率。一般来说，正是电磁力"推着"电荷向前运动，而磁场力相比于电场力来说又十分的小，因此：

$$J = \sigma(E + v \times B) \approx \sigma E$$

这个式子被称为欧姆定律。它的另一个版本是 $V = IR$。在稳恒电流的情况下：

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot J = 0$$

电荷密度处处为 0，所有没有被中和的电荷都分布在表面上。

为什么电荷的速度会正比于外力，而不会一直加速呢？这是因为电荷在运动过程中经常要发生碰撞。一个简单的模型是：设电荷的平均自由程为 λ，则电荷的平均速度为：

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{\lambda a}{2}}$$

但是这个模型是错误的。一个修正过的模型是：电荷本身热运动的速度极快，但是这个速度的方向是随机的，因此电荷两次碰撞中的时间间隔 $t = \dfrac{\lambda}{v_{ther}}$，其平均运动速度

$$\bar{v} = \frac{a\lambda}{2v_{ther}}$$

从而可以推出电荷的平均运动速度：

$$J = \left(\frac{nf\lambda q^2}{2mv_{ther}}\right) E$$

由于电子在电阻中流动时速度恒定，动能没有增加，因此电磁力做的功完全在电阻上转化为热。由于运送单位电荷做功为 V，单位时间内运送电荷数目为 I，因此在单位时间内做的功就是：

$$P = VI = I^2 R$$

这就是焦耳定律。

在一个电路中，我们有电源提供的"外力"和静电力的参与，这些力的效果由绕着电路一圈的积分决定：

$$\epsilon = \oint f \cdot dl = \oint f_s \cdot dl$$

这里的 ϵ 被称为电路的电动势。由于电动势的式子是 f_s 的路径积分，因此它也可以被定义为非静电力对单位电荷做的功。

现在我们来谈论一种最重要的非静电力来源：动生电动势。这种电动势是由洛伦兹力的分量提供的，计算方法是：

$$\epsilon = \oint f_{mag} \cdot dl = \oint (v \times B) \cdot dl$$

我们来证明动生电动势的另一种写法：考虑一根导线在 t 时刻围成面积 S，在 $t + dt$ 时刻面积增加了一点，变成 $S + dS$，那么考虑磁通量的变化：

$$d\phi = \int_{dS} B \cdot da$$

关注导线上的一点 P，设此处导线的速度为 v，电荷相对导线的速度为 u，电荷的速度为 w，那么容易看出面积变化的微元应该写成：

$$da = (v \times dl)dt$$

从而：

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \oint B \cdot (v \times dl)$$

由于 $w = v + u$，且 u 是平行于导线的，故上式也可写成：

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \oint B \cdot (w \times dl) = -\oint (w \times B) \cdot dl = -\oint f_{mag} \cdot dl$$

因此：

$$\epsilon = -\frac{d\phi}{dt}$$

在这里，这个式子没有引入新的物理，只是作为一种计算动生电动势的简单方式出现

电磁感应

法拉第通过实验提出：一个变化的磁场诱导一个电场。根据他的实验结果：

$$\epsilon = \oint E \cdot dl = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\int \frac{\partial B}{\partial t} \cdot da \Rightarrow \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

这被称为法拉第电磁感应定律。与毕奥-萨伐尔定律类似，我们可以求解感生电场：

$$E = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{B \times \hat{r}}{r^2} d\tau$$

我们可以研究线圈之间的互感现象。假如我们有 1，2 两个线圈，在 1 线圈中通入电流 I_1，那么 2 线圈中的磁通量应该正比于 1 线圈中通过的电流：

$$\phi_2 = M_{21} I_1$$

同理我们有：

$$\phi_1 = M_{12} I_2$$

M_{21} 和 M_{12} 被称为互感系数，我们希望算一下它们之间的关系。注意到：

$$\phi_2 = \int B_1 \cdot da_2 = \int (\nabla \times A_1) \cdot da_2 = \oint A_1 \cdot dl_2$$

将 A_1 的表达式代入，即可得到：

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint\oint \frac{dl_1 dl_2}{r}$$

这很容易看出 $M_{12} = M_{21}$。那么我们可以写出互感电动势：

$$\epsilon_2 = -M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$$

一个线圈的电流变化也会引起穿过自身的磁通量的变化，因此有自感系数 $\phi = LI$ 和自感电动势 $\epsilon = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$。

现在我们从电感这个特例开始讨论磁场中储存的能量。如果我们要向电感中输入能量，那么单位时间内做的功是：

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -\epsilon I = LI\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

积分即可得到电感储能：

$$W = \frac{1}{2}LI^2$$

我们将其推广到三维空间中：

$$W=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}I\phi=\frac{I}{2}\oint A\cdot dl=\frac{1}{2}\oint A\cdot Idl\to\frac{1}{2}\int(A\cdot J)d\tau$$

我们只希望式子中出现与磁场自身有关的项，因此我们消去 J:

$$W=\frac{1}{2\mu_0}\int A\cdot(\nabla\times B)d\tau$$

由于:

$$\nabla\cdot(A\times B)=B\cdot(\nabla\times A)-A\cdot(\nabla\times B)$$

那么:

$$W=\frac{1}{2\mu_0}\left[\int B^2d\tau-\int\nabla\cdot(A\times B)d\tau\right]=\frac{1}{2\mu_0}\left[\int B^2d\tau-\oint(A\times B)da\right]$$

将积分区域取成无穷大，自然得到结论:

$$W=\frac{1}{2\mu_0}\int B^2d\tau$$

麦克斯韦方程组

在这里，我们走向电磁学的高峰、电动力学的起始。我们已经集齐了所有电磁学的实验定律:

$$\nabla\cdot E=\frac{1}{\epsilon_0}\rho\quad\nabla\cdot B=0\quad\nabla\times E=-\frac{\partial B}{\partial t}\quad\nabla\times B=\mu_0J$$

不幸的是，这套方程中存在一个致命的错误！我们对方程 3 两侧求散度:

$$\nabla\cdot(\nabla\times E)=0\quad\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot B)=0$$

没有问题。但是现在让我们对方程 4 作用一下:

$$\nabla\cdot(\nabla\times B)=0\quad\mu_0(\nabla\cdot J)=?$$

电流密度的散度不一定为 0，看起来安培定律对非稳恒电流的情形失效了！现在，麦克斯韦要从理论上修复这一点。我们需要使得第（4）个方程右侧为 0，那么:

$$\nabla\cdot J=-\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\nabla(\epsilon_0\frac{\partial E}{\partial t})$$

于是，我们将方程修正为:

$$\nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

我们将 $\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$ 一项称为位移电流。于是，我们给出完整版的真空中的 Maxwell 方程组：

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \quad \nabla \cdot B = 0 \quad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

如果有磁单极子，那么方程中的两条会被改写：

$$\nabla \cdot B = \mu_0 \rho_m \quad \nabla \times E = -\mu_0 J_m - \frac{\partial B}{\partial t}$$

在讨论电介质、磁介质中的 Maxwell 方程组时，我们引入了两个辅助量：D, H。此外，麦克斯韦方程组还有边界条件：

$$D_1^n - D_2^n = \sigma_f \quad B_1^n - B_2^n = 0 \quad E_1^t - E_2^t = 0 \quad H_1^t - H_2^t = K_f \times \hat{n}$$