几何化的经典力学-Ep.4

辛线性代数简介

在传统的内积空间中，我们要求内积是正定的，从而我们使用的度量是黎曼度规；在广义相对论的底流形的切空间中，我们允许内积为负，从而我们使用广义黎曼度规；现在，我们将内积的对称性改为反对称性，从而使用了辛内积。

我们首先证明正则坐标的存在性。一组正则坐标指的是能将某个辛线性空间 V 上的辛形式写成：

$$\omega_{ab} = \sum_i (\mathrm{d}q^i)_a \wedge (\mathrm{d}p^i)_b$$

的坐标。之前我们提到过，坐标无关的哈密顿方程是：

$$\omega_{ab} X_H^a = (\mathrm{d}H)_b$$

记 ω_{ab} 的逆为 ω^{ab} ，两边作用 ω^{ab} 有：

$$X_H^a = \omega^{ab} (\mathrm{d}H)_b$$

可以看出，只有在某个正则坐标系内，ω_{ab} 的分量写成了上文中那样简洁的形式，哈密顿方程组才是我们熟悉的样子。

下面我们给出证明：选两个向量 $v_1^a, \tilde{u}_1^b$，使得 $\omega_{ab} v_1^a u_1^b \neq 0$，取 $u_1^b = \dfrac{\tilde{u}_1^b}{\omega_{ab} v_1^a \tilde{u}_1^b}$，记 v_1^a, u_1^b 张成的空间为 W_1，$W_1^\perp = \{v^a \in X : \forall w^b \in W_1, \omega_{ab} v^a w^b = 0\}$。接下来，只需对 $W_1^\perp$ 和 ω_{ab} 在其上的限制做相同的操作，重复 n 次即可。最终，v_1^a 的对偶矢量就是 $(\mathrm{d}q_1)_a$，u_1^b 的对偶矢量就是 $(\mathrm{d}p^1)_a$，等等。
最终，ω_{ab} 在正则坐标系的对偶坐标基底下的表示：

$$J_{2n\times 2n} = \begin{bmatrix} O & I_{n\times n} \\ I_{n\times n} & O \end{bmatrix}$$

在向量空间 V 配备欧氏度规时，取 $W \subset V$ 是 V 的子空间，我们有 $W \cap W^\perp = \{0\}$，然而在辛内积空间中情况没有这么简单：

- 若 $W^\perp \cap W = \{0\}$，则称 W 为 V 的辛子空间，它等价于 ω_{ab} 在 W 上的限制是非退化的。
- 若 $W \subseteq W^\perp$，我们称 W 是迷向的，反之 $W^\perp \subseteq W$，我们称 $W^\perp$ 是余迷向的
- 若 W 既是迷向的又是余迷向的，则称 W 是全迷向的，或者 W 是 V 的拉格朗日子空间。不难验证，$\mathrm{span}\{q_1, \cdots, q_n\}$ 或者 $\mathrm{span}\{p_1, \cdots, p_n\}$ 都是 V 的拉格朗日子空间。
  此外，在辛线性代数中，以下结论仍然是成立的：

  $$(W^\perp)^\perp = W, \quad \dim W^\perp + \dim W = \dim V$$

  所以 V 的维度是其拉格朗日子空间维度的 2 倍。

设 $(V_1, \omega_1), (V_2, \omega_2)$ 是两个辛线性空间，$\phi : V_1 \to V_2$ 是线性同构，若对于 $\forall \alpha, \beta \in V_1$ 有：

$$\omega_2(\phi(\alpha), \phi(\beta)) = \omega_1(\alpha, \beta)$$

则称 ϕ 是辛线性同构。$(V_2, \omega_2) = (V_1, \omega_1)$ 时称为辛线性变换。不难证明任意 $2n$ 为辛线性空间同构于 $2n$ 维标准辛内积空间。在 n 维内积空间中，所有保内积的正交变换构成群 $O(n)$，在 $2n$ 维辛线性空间上的全体辛线性变换构成 $Sp(2n)$。如果使用 M 表示辛线性变换的矩阵，那么显然 M 应该满足：

$$M^T J_{2n\times 2n} M = J_{2n\times 2n}$$

回到辛流形：辛同胚

现在回到我们的主题。设 M 是一个流形，ω 是 M 上闭的、非退化的 2-形式，则称 (M, ω) 为辛流形。由于一个辛内积空间的维数为偶数，辛流形亦然。之前我们说过，借相空间上的一个正则坐标系，则其上的正则辛形式在任何一点处都可以表示为：

$$\omega_{ab} = \sum_i (\mathrm{d}q^i)_a \wedge (\mathrm{d}p^i)_b$$

容易注意到取 $\theta_a = -\sum_i p_i \mathrm{d}q_i$，那么 $\omega_{ab} = (\mathrm{d}\theta)_{ab}$，从而 ω_{ab} 是闭的，也是恰当的。
现在考虑两个辛流形，设 ϕ 是 $M \to N$ 的微分同胚，我们可以首先定义从 N 上标量场到 M 上标量场的拉回映射 $\phi^\star$：

$$\forall f \in \mathcal{F}_N(0,0), p \in N \quad (\phi^\star f)|_{\phi^{-1}(p)} = f_p$$

递归地，我们可以定义 $\mathcal{F}_M(1,0) \to \mathcal{F}_N(1,0)$ 的推前映射 $\phi_\star$：

$$\forall f \in \mathcal{F}_N(0,0), p \in M, v \in \mathcal{F}_p(1,0), \phi^\star v \in \mathcal{F}_{\phi(p)}(1,0) \quad \phi_\star(v)(f) = v(\phi^\star f)$$

我们可以把推前、拉回映射推广到任意型张量场：

$$\forall p \in N, T \in \mathcal{F}_{p(k,l)}, \phi^\star T \in T_{\phi^{-1}(p)}(k,l) \quad \phi^\star T(v_i)^a(\omega^i)_b = T(\phi_\star v_i)^a(\phi_\star \omega^i)_b$$

$$\forall p \in M, T \in \mathcal{F}_p(k,l), \phi_\star T \in \mathcal{F}_{\phi(p)}(k,l) \quad \phi_\star T(v_i)^a(\omega^i)_b = T(\phi^\star v_i)^a(\phi^\star \omega^i)_b$$

在黎曼流形上利用 $\phi_\star$，我们可以推前度规张量，而现在我们可以推前辛形式。设我们有两个辛流形 $(M_1, \omega_1), (M_2, \omega_2)$，如果 $\omega_2 = \phi_\star \omega_1$，那么自然有：

$$\forall v^a, u^b \in T_x M_1 \quad (\omega_1)_{ab} v^a u^b = (\omega_2)_{ab} (\phi_\star v)^a (\phi_\star u)^b$$

所以我们发现我们从流形之间的微分同胚 ϕ 诱导出推前、拉回映射的目的是将一个流形上的几何原封不动地带到另一个流形上，这里的 ϕ 被称为辛同胚。显然，若 ϕ 是辛同胚，当且仅当它对某点处向量场的推前映射 $T_x M \to T_{\phi(x)} N$ 是辛线性映射。

行至此处，我们已对所谓“正则变换”初窥门径：它可以有两种表述：1）找到一个坐标变换，使得在新的坐标系下 ω_{ab} 仍然点点写成 $\omega_{ab} = \sum_i (\mathrm{d}q^i)_a \wedge (\mathrm{d}p^i)_b$ 的形式；2）找到 (M, ω_{ab}) 上的“等辛形式映射” $\phi_\star \omega_{ab} = \omega_{ab}$。

对于 $(\mathbb{R}^2, (\mathrm{d}q)_a \wedge (\mathrm{d}q)_b)$，有一个小小的结论：若有坐标变换 $Q = Q(p,q), P = P(p,q)$，它是正则变换（等辛形式映射）当且仅当 Jacobian 为 1.

正则变换

我们只考虑无穷小正则变换：$X^i \to X^i + \epsilon \xi^i$，通过一些基于注意力的构造，我们知道：任取函数 G，ξ^i 应满足：

$$\xi^i = -\omega^{ij} \frac{\partial G}{\partial X^j}$$

我们来证明这是合理的。首先由张量分量的坐标变换式：

$$\omega'_{kl} = \omega_{ij} \frac{\partial X^i}{\partial X'^k} \frac{\partial X^j}{\partial X'^l}$$

现在的困难是求旧坐标对新坐标的导数。首先容易知道新对旧的导数：

$$\frac{\partial X'^k}{\partial X^i} = \delta_i^k + \epsilon \frac{\partial \xi^k}{\partial X^i}$$

利用坐标变换的正、反向 Jacobian 互为逆矩阵的特性，我们将逆变换矩阵元做一阶线性近似：

$$\frac{\partial X^i}{\partial X'^k} = \delta_k^i + \epsilon A_k^i$$

从 $\frac{\partial X'^k}{\partial X^j} \frac{\partial X^i}{\partial X'^k} = \delta_j^i$ 解出：

$$\frac{\partial X^i}{\partial X'^k} = \delta_k^i - \epsilon \frac{\partial \xi^i}{\partial X^k}$$

我们把上面坐标变换式里面的东西一项一项抽出来看，首先：

$$\omega_{ij} \delta_k^i \delta_l^j = \omega_{kl}$$

其次：

$$
\begin{aligned}
&\omega_{ij}\left(\delta^i_k\frac{\partial\xi^j}{\partial X^l}+\delta^j_l\frac{\partial\xi^i}{\partial X^k}\right)\\
&=\omega_{kj}\omega^{j\mu}\frac{\partial^2 G}{\partial X^\mu X^l}+\omega_{il}\omega^{i\nu}\frac{\partial^2 G}{\partial X^\nu X^k}\\
&=\delta^\mu_k\frac{\partial^2 G}{\partial X^\mu X^l}-\delta^\nu_l\frac{\partial^2 G}{\partial X^\nu X^k}\\
&=\frac{\partial^2 G}{\partial X^k X^l}-\frac{\partial^2 G}{\partial X^l X^k}\\
&=0
\end{aligned}
$$

所以我们就完成了正确性的证明（依赖于坐标变换）。

在黎曼流形上的 Killing 矢量场满足 Killing 方程：

$$
\nabla_a\xi_b+\nabla_b\xi_a=0
$$

但是在辛流形上我们一般不谈联络，这是因为我们无法根据条件 $\nabla_a\omega_{bc}=0$ 确定唯一的与辛形式适配的无挠联络。我们将使用嘉当魔法公式计算 Lie 导数：

Theorem：嘉当的魔法公式

n -形式的 Lie 导数为：

$$
\mathcal{L}_X\omega_{a\dots y}=\mathrm{d}(\omega_{a\dots y}X^a)_{a\dots y}+X^z(\mathrm{d}\omega)_{z,a\dots y}
$$

我们借一个坐标系完成对上式的证明，并且为了简单起见，我们只对 2-形式完成证明。由于上式是张量等式，换系时左右按照相同的张量变换律变化，所以自然在任何坐标系中成立。显然，要研究 Lie 导数，应直接选择 X^a 的适配坐标系，在此坐标系内，左侧的分量：

$$
\mathcal{L}_X\omega_{i,j}=\frac{\mathrm{d}\omega_{i,j}}{\mathrm{d}x^1}
$$

利用 $X^a=\left(\dfrac{\partial}{\partial x^1}\right)^a,\omega_{ab}=\omega_{ij}(\mathrm{d}x^i)_a\wedge(\mathrm{d}x^j)_b$，容易知道：

$$
\omega_{ab}X^a=2\omega_{1i}(\mathrm{d}x^i)_b
$$

对其求外微分：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(\omega_{ab}X^a)&=2((\mathrm{d}\omega_{12})_a\wedge(\mathrm{dx^2})_b+\cdots+(\mathrm{d}\omega_{1n})_a\wedge(\mathrm{dx^n})_b\\
&=2\frac{\partial\omega_{1j}}{\partial x^i}(\mathrm{d}x^i)_a\wedge(\mathrm{d}x^j)_b\\
&=-2\frac{\partial\omega_{1i}}{\partial x^j}(\mathrm{d}x^i)_a\wedge(\mathrm{d}x^j)_b\ (\star)
\end{aligned}
$$

对 ω 直接求外微分：

$$
(\mathrm{d}\omega)_{zab}=(\mathrm{d}\omega_{ij})_z\wedge(\mathrm{d}x^i)_a\wedge(\mathrm{d}x^j)_b
$$

它和 $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^1}\right)^z$ 作用：

$$
\begin{aligned}
X^z(\mathrm{d}\omega)_{zab}&=(\mathrm{d}\omega_{ij})_k((\mathrm{d}x^k)_z\wedge(\mathrm{d}x^i)_a\wedge(\mathrm{d}x^j)_b)\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^z\\
&=\frac{\mathrm{d}\omega_{ij}}{\mathrm{d}x^1}(\mathrm{d}x^i)_a\wedge(\mathrm{d}x^j)_b+2\frac{\mathrm{d}\omega_{1i}}{\mathrm{d}x^j}(\mathrm{d}x^i)_a\wedge(\mathrm{d}x^j)_b\ \ i,j\neq 1\ (\star\star)
\end{aligned}
$$

注意 $(\star\star)$ 式第二项的 i,j 都不能为 1，那么 $(\star)$ 式里面分母 $j=1$ 的项被全部吃掉。又因为：

$$
-2\frac{\partial\omega_{1i}}{\partial x^1}(\mathrm{d}x^i)_a\wedge(\mathrm{d}x^1)_b=\frac{\partial\omega_{i1}}{\partial x^1}(\mathrm{d}x^i)_a\wedge(\mathrm{d}x^1)_b+\frac{\partial\omega_{1i}}{\partial x^1}(\mathrm{d}x^1)_a\wedge(\mathrm{d}x^i)_b
$$

将所有项加起来，对比 Lie 导数在适配坐标系下的形式即得证。
现在，仔细看看 Lie 导数的计算式，将 ω 取为正则辛形式 ω_{ab} ，它本来就是闭的，所以第二项没了，这要求：

$$
\omega_{ab}X^a_G=-(\mathrm{d}G)_b\Rightarrow X^a_G=-\omega^{ab}(\mathrm{d}G)_b
$$

借正则坐标系展开，我们就可以得到最初“注意到”的结果。

这里顺便提一下正则变换的另一种讲法：在两个坐标系内分别看，“真实”的运动轨迹永远是真实的，因此在相空间内计算作用量的时候，二者作用量应该差某个函数对时间的全导数，这个函数被称为生成函数，通过勒让德变换，我们一共可以找到四种生成函数。这里对生成函数的意义给出另一种诠释：设我们有两个正则坐标系 $(q,p),(Q,P)$，那么：

$$\omega_{ab}=\sum_i(\mathrm{d}q^i)_a\wedge(\mathrm{d}p^i)_a=\sum_i(\mathrm{d}Q^i)_a\wedge(\mathrm{d}P^i)_a$$

利用正则辛形式是恰当的这一事实，立刻得到：

$$\mathrm{d}\left(\sum_i p^i(\mathrm{d}q^i)_a-P^i(\mathrm{d}Q^i)_a\right)=0$$

或者：

$$\sum_i p^i(\mathrm{d}q^i)_a-P^i(\mathrm{d}Q^i)_a=(\mathrm{d}G)_a$$

由于：

$$\omega_{ab}=\mathrm{d}\left(-\sum_i p^i(\mathrm{d}q^i)_a\right)=\mathrm{d}\left(\sum_i q^i(\mathrm{d}p^i)_a\right)$$

使用新坐标也有两种写法，所以两两配对，生成函数就有了四种写法。

不依赖于坐标的正则辛形式定义

我们现在说明正则辛形式是可以不依赖于坐标系定义的，我们已经知道，借一个正则坐标系，取：

$$\theta_a=-\sum_i p^i(\mathrm{d}q^i)_a$$

立刻有 $\mathrm{d}\alpha=\omega$。考察 θ_a 在坐标变换下的行为：取另一个坐标系（不必是正则坐标系），有：

$$\theta_a=-\sum_i p'^i(\mathrm{d}q'^i)_a=\sum_i\sum_j p^j\frac{\partial q^j}{\partial q'^i}(\mathrm{d}q'^i)_a=\sum_j(p^j)(\mathrm{d}q^j)_a$$

从而 θ_a 在坐标变换前后有完全相同的数学形式，它可以不依赖于坐标系定义。又由于外微分是不依赖于坐标系的，所以 ω_{ab} 完全可以不依赖于坐标系！