几何化的经典力学-Ep.3

#ClassicalMechanics

哈密顿力学的几何化

勒让德变换和哈密顿方程

众所周知，拉格朗日方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)=\frac{\partial L}{\partial q}$$

和哈密顿方程组：

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial p} \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial q}$$

是等价的。
但是，按照现有的教材，从 L 构造 H 的过程是通过一个奇怪的"勒让德变换"实现的！这个变换的物理意义是什么呢？在历史上，哈密顿的最初目的是做出 HJB 方程，哈密顿方程反而是副产物，他并未阐明如何想到勒让德变换这个操作。从初等分析力学的角度来解释，我们可以说拉格朗日方程组的形式提醒我们 $p_i=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 这个量是重要的，我们没有必要把它拆解成含有 $\ddot{q}_i$ 的更复杂的形式。使用更现代的语言，我们说勒让德变换建立了构形流形切丛到余切丛的同构。

考虑构形流形 M 其上所有余切矢量构成的集合（即 M 的余切丛） $T^\star M=\bigcup_{x\in M}T_xM$，不难直观地想象，这个集合和切丛一样，也是一个流形。若在 M 上有坐标系 $\{x_i\}$，则在 M 上任意一点 x 的余切空间内有坐标基底 $\{(\mathrm{d}x^i)_a\}$，所以余切丛上自然地有余切坐标系 $\{p_i,q_i\}$。如果我们有一个非退化的张量 τ_{ab}，根据"张量面面观"，它其实是一个从 TM_x 到 $T^\star M_x$ 的映射，那么借助这样的张量，我们可以构造 $TM\to T^\star M$ 的光滑同胚映射。由于所有流形上都可以定义黎曼度规 g_{ab}，所以一种最简单的选择是将 τ_{ab} 选成 g_{ab}，从而对于任何流形，我们都可以建立这个同胚。

Definition：切丛到余切丛的映射，纤维导数

设 M 是构形流形，对于 TM 上的函数 $L(x,v^a)$，我们希望找到一个映射 $\mathbb{F}_{ab}(L)$，它是由函数 L 指定的 $T_xM\to T_x^\star M$ 的映射，使得对于任意的 $x\in M$ 和 $v^a,w^a\in T_xM$，有：

$$\mathbb{F}_{ab}(L)v^aw^b=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|_{s=0}L(x,v^a+sw^a)$$

$F_{ab}(L)v^aw^b$ 称为 T_xM 上 v 沿 w 方向的纤维导数。

例子：若 M 上有 Riemann 度规 g_{ab} 和任意函数 $f(x)$，取 $L(v^a,x)=\dfrac{1}{2}g_{ab}(x)v^av^b+f(x)$，则对于 $v^a,w^a\in T_xM$，计算 v^a 沿着 w^a 方向的纤维导数：

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_{ab}(L)v^aw^b&=\lim_{s\to0}\frac{g_{ab}(x)(v+sw)^a(v+sw)^b-g_{ab}(x)v^av^b}{2s}\\&=\lim_{s\to0}\frac{2sg_{ab}v^aw^a+s^2g_{ab}w^aw^b}{2s}\\&=g_{ab}v^aw^b\end{aligned}$$

可见此时的纤维导数就是由度规指定的内积。

例子：在切坐标系 $\{x^i,v^i\}$ 下写出纤维导数：

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_{ab}(L)v^aw^b&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|_{s=0}L(x,v+sw)\\&=\frac{\partial L}{\partial v^i}(x,v)\cdot w^i\end{aligned}$$

从而，$\mathbb{F}_{ab}(L)v^a$ 这个余切矢量在余切坐标系下的坐标为 $\left(\dfrac{\partial L}{\partial v^1},\cdots,\dfrac{\partial L}{\partial v^n}\right)$。

Definition：哈密顿量

设 M 是构形流形，L 是 TM 上的函数，$x\in M, v^a\in T_xM$，称函数：

$$E: TM\to\mathbb{R}\quad v^a\mapsto \mathbb{F}_{ab}(L)v^av^b-L(x,v^a)$$

为构形流形切丛上的连带能量函数，称

$$H=E\circ\mathbb{F}^{ab}(L)$$

为构形流形余切丛上的哈密顿量。具体地，对于 $x\in M, w_a\in T_x^\star M$，有：

$$H: w_a\mapsto \mathbb{F}_{ab}(L)\mathbb{F}^{ac}(L)\mathbb{F}^{bd}(L)w_cw_d-L(x,\mathbb{F}^{ab}(L)w_b)$$

将 $L: TM\to\mathbb{R}$ 变成 $H: T^\star M\to\mathbb{R}$ 的操作称为勒让德变换。

怎么看出这个东西和经典力学中勒让德变换的对应关系呢？刚才我们已经说过，$\mathbb{F}_{ab}(L)v^a$ 这个余切矢量的坐标是 $\left(\frac{\partial L}{\partial v^1},\cdots,\frac{\partial L}{\partial v^n}\right)$，那么我们不妨直接取 w^a 的坐标为 $\left(\frac{\partial L}{\partial v^1},\cdots,\frac{\partial L}{\partial v^n}\right)$，不难猜到 $\mathbb{F}^{ac}(L)w_c$ 在切坐标系中的坐标就是 $(v^1,\cdots,v^n)$。依托具体的坐标系，容易看出上面的哈密顿量确实是 $H=\frac{\partial L}{\partial v_i}v^i-L(x,v)$。

我们之前说 $\mathbb{F}_{ab}(L)$ 指定了映射 $v^a\mapsto w_a$，实际上，如果搭配上默认的操作 $x\mapsto x$，我们可以说 $\mathbb{F}(L)$ 指定了 $TM\to T^\star M$ 上的映射。所以：

Theorem：哈密顿方程

构形流形为 M， 设 TM 上的一条曲线 γ 满足拉格朗日方程，则 $T^\star M$ 上的曲线 $\mathbb{F}(L)\circ\gamma$ 满足哈密顿方程。

这里我们给出一个坐标系依赖的证明。根据 $\mathbb{F}(L)$ 的定义有：

$$\mathbb{F}(L)(q^1,\cdots q^n,v^1,\cdots,v^n)=(q^1,\cdots q^n,p^1,\cdots,p^n)$$

就是把 TM 上的一个点映射到 $T^\star M$ 上。根据上面的讨论有 $p_i=\frac{\partial L(x,v)}{\partial v^i}$。
根据 n 个 (q,v_i) 与 p_i 之间的关系，可以反解 $v^i=v^i(q,p)$，那么：

$$H(q,p)=v^i(q,p)p_i-L(q,v(q,p))$$

计算 H 对 q_i 的导数，有（为了避免指标记号混淆，这里显式写出了求和记号）：

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial q^i}(q,p)&=\sum_k p_k\frac{\partial v^k}{\partial q_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\partial L}{\partial v^k}\frac{\partial v^k}{\partial q_i}\\&=\sum_k\left(p_k-\frac{\partial L}{\partial v^k}(q,v)\right)\frac{\partial v_k}{\partial q_i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}\\&=-\frac{\partial L}{\partial q^i}(q,x)\end{aligned}$$

做类似的计算可以得到：

$$\frac{\partial H}{\partial p_i}(q,p)=v^i(q,p)=\frac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t}$$

从而立刻得到哈密顿方程的其中一条。要得到另一条方程：

$$\frac{\partial H}{\partial q^i}=-\frac{\partial L}{\partial q^i}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\right)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_i$$

所以我们说，纤维导数（或勒让德变换）指定了 TM 到 $T^\star M$ 的一个同构，$T^\star M$ 被称为相空间，坐标 q^i 称为正则坐标，p_i 称为正则动量。之前的拉格朗日力学是在 $2n$ 维流形 TM 上进行的，然而在研究方法中，我们似乎并没有把 TM 当作一整个流形看待（我们并没有在 TM 上定义度规，等等）。现在，我们要把 $T^\star M$ 直接当作 $2n$ 维流形看待，而且这个流形上并非定义了一个 Riemann 度规，而是定义了一个辛形式 ω_{ab}（它取代了度规的地位），所以我们将这样的流形

$(T^\star M, \omega_{ab})$ 称为一个辛流形。并且，$T^\star M$ 上的这个辛形式还相当特殊，它被称为“正则辛形式”，是说在 $T^\star M$ 上的每一点都存在一个局部坐标系 (q, p)（也就是正则坐标系），使得它能够写成：

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{d}q_i)^a \wedge (\mathrm{d}p_i)^a$$

的形式。将 $T^\star M$ 提升为辛流形之后，我们还可以给出哈密顿方程的坐标无关形式：

Theorem：哈密顿方程的坐标无关形式

定义哈密顿向量场 X_H^a：

$$\omega_{ab} X_H^a = (\mathrm{d}H)_b$$

则向量场 X_H^a 在正则坐标系下写成：

$$X_H^a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \right)^a - \frac{\partial H}{\partial q_i} \left(\frac{\partial}{\partial p_i} \right)^a$$

证明：借正则坐标系直接计算 $\omega_{ab} X_H^a$，比较它与 $(\mathrm{d}H)_b$ 在正则坐标系内的分量即可。