几何化的经典力学-Ep.2

#ClassicalMechanics

拉格朗日矢量场

我们先来讨论流形的切丛。设流形 M 上 x 点处的切空间为 TM_x，则所有点处的切空间之并：

$$TM = \bigcup_x TM_x$$

称为流形 M 的切丛。切丛这个东西从定义上来看好像是将原流形的切空间"一块一块粘起来"的，为什么我们说切丛也是个流形？直观上，可以思考一个例子：将一维流形 S^1 嵌入在 $\mathbb{R}^3$ 中，它每一点处的切空间都是一维的，"可视化"后是一条直线。若将 S^1 可视化为水平的圆周，那么先指定圆周上一点，再指定过此点的直线上一点的这个操作可以视作从圆柱 $S^1 \times \mathbb{R}^1$ 上取点。严格来说，对于任何流形的局部，以上推理都是合理的。这是因为 n 维流形上 x 处的切空间自然与 $\mathbb{R}^n$ 同构。因此在流形 M 上取坐标卡 $\{U, \Psi\}$ 所指定的开集 U，$\bigcup_{x\in U} TM_x$ 可以视作 $U \times \mathbb{R}^n$。

如何描述切丛中的点？显然，我们需要先在流形上指定一点，再指定此点的一个切向量。在流形上我们有坐标 $(x^1, \cdots x^n)$ ，这一组坐标自然诱导出坐标基底，因此我们自然有切向量的坐标 $(v^1, \cdots, v^n)$，因此我们可以自然地给出切丛中一点的坐标：

$$(p, v) = ((x^1, \cdots x^n), (v^1, \cdots v^n)) \quad \forall\, (p, v) \in TM$$

显然，拉格朗日力学中，粒子的"全部信息（也就是位置和速度）"由构形流形 M 的切丛上的一条曲线 $\gamma(t)$ 描述，我们现在希望求出这条曲线的切矢。设 $\mathbb{R}^n$ 中自然坐标系用 x_i 记，而流形上的广义坐标用 q_i 记，则动能写成：

$$T = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j \quad g_{ij} = \sum_k m_k \frac{\partial x^k}{\partial q^i} \frac{\partial x^k}{\partial q^j}$$

我们可以把拉格朗日方程降阶：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q_i = u_i$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial u_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

我们可以把它做成矩阵形式，只需要注意到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial u_i}\right) = \sum_j \frac{\partial^2 L}{\partial u_j \partial u_i} \dot{u}_j + \sum_j \frac{\partial^2 L}{\partial q_j \partial u_i} \dot{q}_j$$

记 $L_{u_i u_j} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial u_i u_j}$，$L_{u_i q_j}, L_{q_i}$ 同理，那么有如下矩阵方程：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ L_{u_1 q_1} & \cdots & L_{u_1 q_n} & L_{u_1 u_1} & \cdots & L_{u_1 u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{u_n q_1} & \cdots & L_{u_n q_n} & L_{u_n u_1} & \cdots & L_{u_n u_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \\ \dot{u}_1 \\ \vdots \\ \dot{u}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ L_{q_1} \\ \vdots \\ L_{q_n} \end{pmatrix}$$

根据以上方程，我们可以求出速度相空间上面控制相点演化的矢量场，那么只需要对上式取逆，求出 $(\dot{q}_1, \cdots \dot{q}_n, \dot{u}_1, \cdots, \dot{u}_n)$ 即可。$\gamma(t)$ 的切矢形式化地写成：

$$V^a = \dot{q}_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a + \dot{u}_i \left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right)^a$$

单摆是一个可以可视化拉格朗日向量场的典型例子，读者可以编写一个程序进行可视化。

小振动

众所周知，构型空间 M 上势能函数 V 的驻点是系统的平衡点，具体是否是稳定平衡点需要根据 V 在平衡点附近的性态判断。取切从上的坐标系 $\{q_1, \cdots q_N, u_1, \cdots u_N\}$，拉格朗日量被写为：

$$L(q,u) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} m_{ij}(q)u_i u_j - V(q)$$

为了在平衡点附近处理问题，记平衡点为 $q_i = q_i^{ss} + \epsilon \tilde{q}_i, u_i = \epsilon \tilde{u}_i, \epsilon > 0, \epsilon \ll 1$，从而我们可以做一个坐标变换 $\{q,u\} \to \{\tilde{q}, \tilde{u}\}$，并检查 L 在新的坐标系下的写法：

$$\begin{aligned}
&L(q^{ss} + \epsilon\tilde{q}, \epsilon\tilde{u}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j} m_{ij}(q^{ss} + \epsilon\tilde{q}, \epsilon\tilde{u})\epsilon^2 \tilde{u}_i\tilde{u}_j - V(q^{ss} + \epsilon\tilde{q}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j} m_{ij}(q^{ss})\epsilon^2\tilde{u}_i\tilde{u}_j + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k}\frac{\partial m_{ij}(q^{ss})}{\partial q_k}\epsilon^3\tilde{u}_i\tilde{u}_j - V(q^{ss}) - \sum_i \frac{\partial V(q^{ss})}{\partial q_i}\epsilon\tilde{q}_i - \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial V(q^{ss})}{\partial q_i q_j}\epsilon^2\tilde{q}_i\tilde{q}_j + \cdots \\
&= -V(q^{ss}) - \sum_i \frac{\partial V(q^{ss})}{\partial q_i}\epsilon\tilde{q}_i + \frac{\epsilon^2}{2}\left(\sum_{i,j} m_{ij}(q^{ss})\tilde{u}_i\tilde{u}_j - \sum_{i,j}\frac{\partial V(q^{ss})}{\partial q_i q_j}\tilde{q}_i\tilde{q}_j\right) + O(\epsilon^3)
\end{aligned}$$

常数项是没有意义的，而一次项在小振动中只引起平衡位置的移动，而
不引起振动频率改变等更加实质的变化，因此我们可以只保留二次型，有效的拉氏量是：

$$\tilde{L}(\tilde{q}, \tilde{u}) = \sum_{i,j} m_{ij}\tilde{u}_i\tilde{u}_j - h_{ij}\tilde{q}_i\tilde{q}_j \quad h_{ij} = \frac{\partial V(q^{ss})}{\partial q_i q_j}$$

为简单起见，下面我们将 L 写作 $L(q, \dot{q}) = \dot{q}^T G\dot{q} - q^T Hq$。为了进一步简化这个问题，我们可以对 G, H 做同时对角化，这需要求解广义本征矢量问题：

$$Hx_i = \lambda_i Gx_i$$

这样的广义本征矢量有很好的正交性质，考虑两个互不相同的广义本征矢量：

$$Hx_i = \lambda_i Gx_i \quad Hx_j = \lambda_j Gx_j$$

对第一个方程左乘 x_j^T，第二个方程左乘 x_i^T 可以得到：

$$x_j^T Hx_i = \lambda_i x_j^T Gx_i \quad x_i^T Hx_j = \lambda_j x_i^T Gx_j$$

由于 H, G 都是对称的，我们有 $x_j^T Hx_i = x_i^T Hx_j, x_j^T Gx_i = x_i^T Gx_j$，两个方程相减得到：

$$x_j^T Hx_i - x_i^T Hx_j = (\lambda_i - \lambda_j)x_i^T Gx_j = 0$$

从而若 $\lambda_i \neq \lambda_j$，必有：

$$x_i^T Gx_j = 0 \quad x_i^T Hx_j = 0$$

对于相同的本征矢量，我们可以直接要求 $x_i^T Gx_i = 1$（通过调整本征矢量的长度），此时显然有 $x_i^T Hx_i = \lambda_i$。所以，如果我们选择共同本征矢量 $\{x_i\}$ 作为基底，我们就可以通过新坐标对角化 G, H。从而：

$$L = \dot{s}_i^T \dot{s}_i - s_i^T \Omega s_i$$

刚体

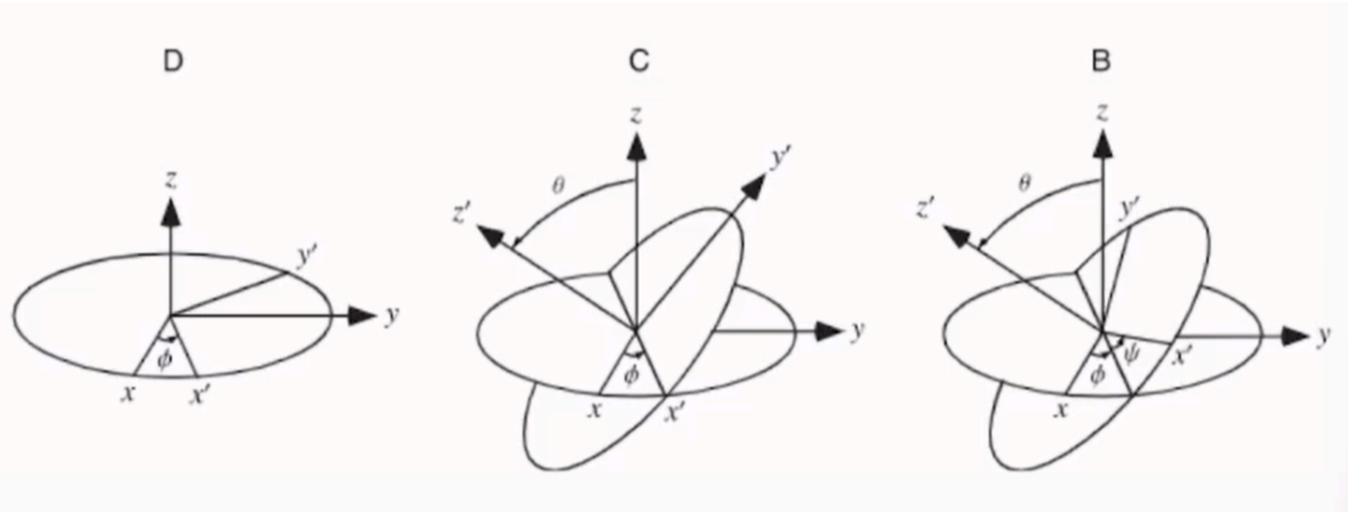
我们知道，刚体在运动过程中，其上任意两点间的距离是保持不变的，因此其运动可以使用等距变换描述。$\mathbb{R}^n$ 中的等距变换可以描述为 $x \mapsto Ax + b$，其中 A 是实正交矩阵。在研究刚体时，我们会取固连在刚体上的坐标系，使用 a 记刚体上某一质点在固连坐标系内的位置，以 x 记这一质点在惯性坐标系内的位置，则 $x = x(a,t)$ 是一个等距变换，从而：

$$x(a,t) = A(t)a + b(t)$$

并且我们要求 $A(0)=I, b(0)=0$。由于我们要求刚体的姿态连续变化，而 $A(t)$ 在连续变化中不能跨越 $O(3)$ 的不同连通分支，因此 A 实际上只能在 $SO(3)$ 中。由于 $SO(3)$ 的维度为 3，显然刚体的最大自由度为 $3+3=6$。
欧拉声明，任意群元 $A\in SO(3)$ 可以分解为三个矩阵的乘积：$A=DCB$

$$D=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & \\ \sin\varphi & \cos\varphi & \\ & & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & \\ \sin\psi & \cos\psi & \\ & & 1\end{pmatrix}$$

这里的三个欧拉角 ϕ,θ,ψ 是 $Z-Y-Z$ 转动方式下的三个欧拉角，它们分别进行了自转、章动和进动：



下面引入角速度。作为最简单的例子，考虑定点转动的刚体有 $x(a,t)=A(t)a$，两边对时间求导有：

$$\dot{x}(a,t)=\dot{A}(t)a=\dot{A}(t)A^{-1}(t)x(a,t)=\dot{A}(t)A^{T}(t)x(a,t)$$

容易注意到 $\dot{A}(t)A^{T}(t)$ 是一个反对称矩阵，它可以视作某个角速度 2-形式在实验室参考系下的分量 Ω_{ij}，它的对偶就是角速度 1-形式，也就是说：

$$\dot{x}_a=\Omega_{ab}a^b=\epsilon_{abc}\omega^c a^b$$

右边这个东西就是 $\omega\times a$，这里的 ω^a 就是一般所说的角速度矢量。你可以写出它在实验室系和随动系的分量。下面研究刚体的动力学：设刚体的质量密度为 ρ，它的质量和动能写为：

$$m=\int\rho(a)\mathrm{d}a\quad T=\frac{1}{2}\int\rho(a)||\dot{x}(a,t)||^2\mathrm{d}a$$

考虑定点旋转的刚体，其动能为：

$$\begin{aligned}T(t)&=\frac{1}{2}\int\rho(a)||\dot{A}(t)a||^2\mathrm{d}a\\&=\frac{1}{2}\int\rho(a)||A^T\dot{A}(t)a||^2\mathrm{d}a\\&=\frac{1}{2}\int\rho(a)||\omega(t)\times a||^2\mathrm{d}a\\&=\frac{1}{2}\omega^TJ\omega\end{aligned}$$

其中第四个等号引入的惯量张量 J：

$$J=\int\rho(a)(a^TaI-aa^T)\mathrm{d}a$$

这是由于：

$$\omega^TJ\omega=\int\rho(a)(a^Ta\omega^T\omega-(a^T\omega)^T(a^T\omega))\mathrm{d}a=\int\rho(a)||\omega(t)\times a||^2\mathrm{d}a$$

第二个等号利用了 A^T 为正交矩阵的事实。通过选择合理的随动坐标系（J 的本征矢量）时，J 可以被对角化，从而为刚体动能的计算带来很多方便。势能的计算往往可以通过简单的积分解决，于是我们就可以建立刚体的动力学方程了。