几何化的经典力学-Ep.1

Lagrange 力学的几何化

变分原理

本节主要回顾变分原理的推导过程。在经典力学中，变分原理被用于求解以下问题：求 $\mathbb{R}^n$ 中的端点固定曲线 $\gamma(t):[t_0,t_1]\to\mathbb{R}^n$，$\gamma(t_0)=a,\gamma(t_1)=b$，使得作用量：

$$S[\gamma]=\int_{t_0}^{t_1}L(\gamma,\dot{\gamma},t)\mathrm{d}t$$

最小化。换言之，我们考虑曲线族 $\gamma^\epsilon(t):[t_0,t_1]\times(-\epsilon_0,\epsilon_0)\to\mathbb{R}^n$，若它满足 $\gamma^\epsilon(t_0)=a,\gamma^{\epsilon(t_1)}=b,\forall\epsilon\in(-\epsilon_0,\epsilon_0)$，并且 $\gamma|_{[t_0,t_1]\times(-\epsilon_0,\epsilon_0)}$ 是 $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^n$ 的二阶可微映射，则我们称它为二阶可微的定端曲线族。那么，若 $\gamma(t)$ 为以上最小作用量问题的解，则 $S[\gamma^\epsilon]$ 作为 ϵ 的普通函数，应当在 $\epsilon=0$ 处取得最小值。从而我们计算一阶条件：

$$\begin{aligned}0&=\frac{\mathrm{d}L[\gamma^\epsilon]}{\mathrm{d}\epsilon}\\&=\int\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial\gamma_i}\frac{\partial\gamma_i^\epsilon}{\partial\epsilon}+\frac{\partial L}{\partial\dot{\gamma}_i}\frac{\partial^2\gamma_i^\epsilon}{\partial t\partial\epsilon}\right)\mathrm{d}t\\&=\sum_i\left[\frac{\partial L}{\partial\dot{\gamma}_i}\frac{\partial\gamma_i^\epsilon}{\partial\epsilon}\right]_{t_0}^{t_1}+\int\sum_i\frac{\partial\gamma_i^\epsilon}{\partial\epsilon}\left(\frac{\partial L}{\partial\gamma_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\gamma}_i}\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

由于这里面 γ^ϵ 是任意的，故 $\dfrac{\partial\gamma_i^\epsilon}{\partial\epsilon}$ 也是任意的。由于我们的边界固定，所以第一项自动为 0，若要使得上述一阶条件成立，我们必然有：

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}=0$$

此即所谓 Euler-Lagrange 方程。注意：这样的方程只适用于受到保守力+所有约束均为理想完整约束的系统。

理想完整约束、牛顿运动定律的变分形式

何为理想完整约束？我们称构型空间是嵌入在 $\mathbb{R}^N$ 中的 n 维光滑子流形 M。由于 $\mathbb{R}^N$ 中自带度规，于是我们可以谈及两个向量的内积。约束力是从 M 的切丛 TM 到 $\mathbb{R}^N$ 中向量的映射 R。我们称一个约束力 R 是理想完整的，如果 $\forall x\in M,\dot{x}\in T_xM$ 都有：

$$R(x,\dot{x})\cdot\dot{x}=0$$

受到保守主动力+所有约束均为理想完整约束的质点的牛顿运动方程写为：

$$m\ddot{x}=F(x)+R(x,\dot{x})\quad F(x)=-\nabla V(x)$$

则牛顿运动定律对应的变分形式应当表述为：若 $\gamma:I\to M$ 满足 $m\ddot{x}=F(x)+R(x,\dot{x})$，且端点固定，则对于 M 上二阶可微定端曲线族 $\gamma(t,\epsilon),\gamma(t,0)=\gamma(t)$ 有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}S[\gamma^\epsilon]|_{\epsilon=0}=0$$

其中：

$$S[\gamma]=\int L(\gamma,\dot{\gamma})\mathrm{d}t\quad L(\gamma,\dot{\gamma})=\frac{1}{2}m(\dot{\gamma})^2-V(\gamma)$$

证明：计算一阶条件：

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}S[\gamma^\epsilon] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{2}m(\dot\gamma(t))^2 - V(\gamma(t))\mathrm{d}t \\
&= \int m\frac{\partial\gamma^\epsilon(t)}{\partial\epsilon\partial t}\cdot\frac{\partial\gamma^\epsilon(t)}{\partial t} - \nabla V(\gamma^\epsilon(t))\cdot\frac{\partial\gamma^\epsilon(t)}{\partial\epsilon}\mathrm{d}t \\
&= \int m\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\gamma^\epsilon(t)}{\partial\epsilon}\cdot\frac{\partial\gamma^\epsilon(t)}{\partial t}\right) - \frac{\partial\gamma^\epsilon(t)}{\partial\epsilon}\cdot\frac{\partial\gamma^\epsilon(t)}{\partial t^2}\right] - \nabla V(\gamma^\epsilon(t))\cdot\frac{\partial\gamma^\epsilon(t)}{\partial\epsilon}\mathrm{d}t \\
&= -\int\frac{\partial\gamma^\epsilon(t)}{\partial t}\cdot\left(m\frac{\partial^2\gamma^\epsilon(t)}{\partial t^2} + \nabla V(\gamma^\epsilon(t))\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

现在看一看括号里面是什么。根据牛顿第二定律：

$$
m\frac{\partial^2\gamma^\epsilon(t)}{\partial t^2} + \nabla V(\gamma^\epsilon(t)) = -\nabla V(\gamma^\epsilon(t)) + R(\gamma,\dot\gamma) + \nabla V(\gamma^\epsilon(t)) = R(\gamma,\dot\gamma)
$$

我们发现 $\frac{\partial\gamma^\epsilon(t)}{\partial t}$ 是曲线的切矢，它是和 R 正交的，因此上述一阶条件显然满足。

经典力学的黎曼几何表述

上面的推导中我们将构形流形视为嵌入在 $\mathbb{R}^n$ 中的子流形，这是一种"外在"的表述。我们能不能使用一种"内蕴"的几何表述重述拉格朗日力学呢？这需要我们先证明一种不同于上述"等时变分原理"的"等能量变分原理"，即莫培督原理。

考虑那些总能量 H 不含时间的系统，我们希望求出它从起点运动到终点的真实路径。我们仍然可以将起点到终点用无数条路径连接起来，形成曲线族 $\gamma^\epsilon(t)$，但是我们现在不固定到达的时间，而是要求质点沿着每条路径运动时的总能量 H 保持不变。我们首先证明莫培督原理：起点到终点的真实路径是使得简约作用量：

$$
W = \int p\cdot\dot\gamma\mathrm{d}t
$$

最小的路径。其中 p_a 是广义动量：

$$
p = \frac{\partial L(\gamma,\dot\gamma)}{\partial\dot\gamma}
$$

首先注意到简约作用量可以写成：

$$
W[\gamma] = \int_0^t p\cdot\dot\gamma\mathrm{d}t = \int_0^t(p\cdot\dot\gamma - H)\mathrm{d}t + \int_0^t H\mathrm{d}t = \int_0^t L\mathrm{d}t + Ht
$$

现在不只有 $\gamma(t)$ 变化，到达终点的时间 t 也会变化。不妨令路径从 $\gamma(t)\to\gamma(t)+\delta\gamma(t)$，到达终点的时间 $t\to t+\delta t$。计算 W 的一阶变化 δW，有：

$$
\delta W = \int_0^t\mathrm{d}t\left(\frac{\partial L}{\partial\gamma} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot\gamma}\right)\cdot\delta\gamma(t) + \left(\frac{\partial L}{\partial\dot\gamma}\cdot\delta\gamma(t)\right)|_0^t + L\mathrm{d}t + H\mathrm{d}t
$$

但是，由于原路径 $\gamma(t)$ 在 t 时刻到达终点，而新路径 $\tilde\gamma(t) = \gamma(t)+\delta\gamma(t)$ 在 $t+\delta t$ 时刻到达终点，因此这里面的 $\delta\gamma(t)$ 和 δt 是有关系的。现在求出这个关系：

$$
\begin{aligned}
\delta\gamma(t) &= \tilde\gamma(t) - \gamma(t) \\
&\approx \tilde\gamma(t+\delta t) - \dot{\tilde\gamma}(t)\delta t - \gamma(t) \\
&= -\dot{\tilde\gamma}(t)\delta t \\
&\approx -\dot\gamma(t)\delta t
\end{aligned}
$$

代入得到：

$$
\delta W = \int_0^t\mathrm{d}t\left(\frac{\partial L}{\partial\gamma} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot\gamma}\right)\cdot\delta\gamma(t) + (L - p\dot\gamma)\mathrm{d}t + H\mathrm{d}t
$$

上式在真实运动路径上等于 0。第一项等于 0 是因为真实路径满足欧拉-拉格朗日方程；后面的部分根据哈密顿量（广义能量）H 的定义可知为 0。从而我们证得莫培督定理。现在考虑单质点，将其运动轨迹在构形流形上的的第 i 个坐标分量写为 $\gamma^i(t)$，由于单质点的动能可以写成二次型，则其简约作用量为：

$$
\begin{aligned}
W[\gamma] &= \sum_{i,j} \int_0^t \frac{\partial \left(\frac{1}{2} m_{ij} \dot\gamma^i(t) \dot\gamma^j(t) - V(\gamma(t)) \right)}{\partial \dot\gamma^i} \dot\gamma^i(t) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^t \sum_{i,j} m_{ij} \dot\gamma^i(t) \dot\gamma^j(t) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^t 2T \mathrm{d}t \\
&= \int_0^t 2(H - V(\gamma)) \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

其中最后一步利用了莫培督原理中所有路径的能量是相等的这一性质。再利用这一性质得到：

$$
\frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij} \frac{\mathrm{d}\gamma^i(t)}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\gamma^j(t)}{\mathrm{d}t} + V(\gamma(t)) = H \Rightarrow \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{1}{2(H-V)} \sum_{ij} m_{ij} \mathrm{d}\gamma^i \mathrm{d}\gamma^j}
$$

代入 W 的表达式后立刻得到：

$$
W = \int_a^b \sqrt{2(H - V(\gamma)) \sum_{ij} m_{ij} \mathrm{d}\gamma^i \mathrm{d}\gamma^j}
$$

这里的 W 就是测地线长度。于是我们现在可以这样说：取定一系列具有能量 H 的路线，则这一些路线可以经过构形流形上满足 $H > V(\gamma)$ 的开集 O。在开集 O 或者说构形流形 M 的子流形上，可取度规：

$$
g_{ab} = (H - V) m_{ab}
$$

以上表述没有使用将 M 嵌入在 $\mathbb{R}^N$ 空间中这一想法，因此这个表述是完全内蕴的。我们可以注意到此时的 g_{ab} 并不是将 M 嵌入在 $(\mathbb{R}^N, \delta_{ab})$ 中得到的 M 上的诱导度规。以上推导中只使用了单质点的动能可以写成二次型的性质，原则上可以推广至所有类似的系统。

诺特定理

现在，我们给出诺特定理的另一个表述。设构形流形 M 上配备度规 $g_{ab} = (H - V) m_{ab}$ 以及与度规适配的协变导数算符 ∇_a，将 M 上任意测地线记作 $q(s)$，s 为测地线的线长参数，则：$I = g_{ab} \xi^a u^b$ 沿测地线 $q(s)$ 不变。其中 ξ^a 是 M 上的 Killing 场，u^b 为 $q(s)$ 的切矢。

证明：考察 I 沿测地线的协变导数，借构形流形上一个坐标系写成分量式：

$$
\begin{aligned}
u^\sigma \nabla_\sigma (g_{\mu\nu} \xi^\mu u^\nu) &= u^\sigma g^{\mu\nu} \nabla_\sigma (\xi^\mu u^\nu) \\
&= g_{\mu\nu} u^\sigma \xi^\mu \nabla_\sigma u^\nu + g_{\mu\nu} u^\sigma u^\nu \nabla_\sigma \xi^\mu \\
&= 0 + g_{\mu\nu} u^\sigma u^\nu \nabla_\sigma \xi^\mu \\
&= u^\sigma u^\nu \nabla_\sigma \xi_\nu \\
&= \frac{1}{2} u^\sigma u^\nu (\nabla_\sigma \xi_\mu + \nabla_\mu \xi_\sigma) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

其中第一个等号利用了度规与协变导数算符适配这一事实，第二个等号利用了协变导数的莱布尼兹性质，第三个等号利用了测地线方程，最后一个等号利用了 Killing 方程。在这样的证明方式中，我们看到了对称性和守恒量更直观的联系。