Day 5. 对称性与守恒律.

>> 运动常数.

若可以找到由系统的广义坐标 $\{q_{cl}(t)\}$ 和广义速度 $\{\dot{q}_{cl}(t)\}$ 可以凑出只取决于初始条件的常数函数 $\frac{dC(t,q(t),\dot{q}(t))}{dt}=0$. ⇒"运动常数". 它是一阶ODE. 相对于二阶ODE更好计算.

(不含时间, 则称为"整体运动常数").

自由度为 s 的系统, 其运动 (EL方程) 为 s 个二阶ODE. 要 $2s$ 个初条件才能确定一组解. ⇒ $\begin{cases} q^a_{cl}=q^a_{cl}(t,C_1,\cdots C_{2s}) \\ \dot{q}^a_{cl}=\dot{q}^a_{cl}(t,C_1,\cdots C_{2s}) \end{cases}$

从其中某一个, 我们可以解出 $t=t(\vec{q},\vec{\dot{q}},C_1\cdots C_{2s})$.
将其代入其余式子 ⇒ $2s-1$ 个关于 $\{\vec{q},\vec{\dot{q}},C_1,\cdots C_{2s}\}$ 的方程
从中可解出 $C_1(\vec{q},\vec{\dot{q}})\cdots C_{2s-1}(\vec{q},\vec{\dot{q}})$.
它们独立, 且它们为初始条件, 是独立常值.

⇒ s 个自由度的系统, 原则上可解出 $2s-1$ 个独立的运动常数. 可加的运动常数称为守恒量.

对于无相互作用的子系统组成的大系统, 拉氏量可写成子系统之和 ⇒ $L=L_A+L_B$.

>> 广义动量, 能量.

广义动量守恒: 拉氏量里不包含某一广义坐标? $0=\frac{d}{dt}p_a=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right)$ ⇒ $p_a=\text{Const}$.

☆ 注意, 不可将守恒量塞入E-L方程, 因为守恒量只在真实世界线上守恒, 而不是在任意连接起止点的世界线上守恒.

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial L}{\partial t}+\frac{\partial L}{\partial q^a}\cdot\frac{dq^a}{dt}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\cdot\frac{d\dot{q}^a}{dt}=\frac{\partial L}{\partial t}+\frac{\partial L}{\partial q^a}\dot{q}^a+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\dot{q}^a\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right)\dot{q}^a$$

$$=\frac{\partial L}{\partial t}-\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^a}\right]\dot{q}^a+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\dot{q}^a\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\dot{q}^a-L\right]+\frac{\partial L}{\partial t}=0$$

⇒ 定义广义能量 $h(t,q,\dot{q})=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\dot{q}^a-L(t,q,\dot{q})$ $\quad \frac{\partial L}{\partial t}=-\frac{dh}{dt}$.

⇒ 若 $\frac{\partial L}{\partial t}=0$. 则 $h=h(q,\dot{q})=\text{Const}$. 这样的系统称为保守系统.

运动看作相空间上的流动, 自由粒子沿测地线移动. (若规定 $x_a=0$. $y=0$).

我们在前面已知, 在非相对论下, 动能被写成以下形式: $L=T-V=\frac{1}{2}\underline{\underline{G_{ab}}}\dot{q}^a\dot{q}^b+x_a\dot{q}^a+y-V$.

从而 $h=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\dot{q}^a-L$

$$=\frac{\partial}{\partial \dot{q}^a}\left(\frac{1}{2}G_{cd}\dot{q}^c\dot{q}^d+x_c\dot{q}^c+y-V\right)\cdot\dot{q}^a-\frac{1}{2}G_{ab}\dot{q}^a\dot{q}^b-x_a\dot{q}^a-y+V$$

$$=G_{ab}\dot{q}_a\dot{q}_b+x_a\dot{q}_a-\frac{1}{2}G_{ab}\dot{q}^a\dot{q}^b-x_a\dot{q}^a-y+V=\frac{1}{2}G_{ab}\dot{q}^a\dot{q}^b-y+V$$

而系统总能量:
$E=T+V=\frac{1}{2}G_{ab}\dot{q}^a\dot{q}^b+x_a\dot{q}^a+y+V$
可以看出, 这里说的能量这数和一般能量并不相同, 除非动能可以写成二次型, $x_a=0, y=0$.
⇒ 只有在定常约束时, 才有 $h=E$.

>> 时空的对称性与守恒量.

考虑 N 粒子质点系, 广义坐标取为直角坐标 $\{\vec{x}_{(\alpha)}\}$. $\mathcal{L}=\mathcal{L}(t,\vec{x}_{(1)},\cdots\vec{x}_{(N)};\dot{\vec{x}}_{(1)},\cdots\dot{\vec{x}}_{(N)})$. 对空间坐标进行无穷小变换. $\vec{x}_{(\alpha)}(t)\to\vec{x}'_{(\alpha)}(t)=\vec{x}_{(\alpha)}(t)+\delta\vec{x}_{(\alpha)}(t)$

则在这样的变换下, 作用量的变化为: $\delta S=\int dt\left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial x_a}\cdot\delta x_a+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a}\cdot\delta\dot{x}_a}_{[t,t+dt]\text{内作用量变化}}\right)=\int dt\left[-\underbrace{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a}-\frac{\partial L}{\partial x_a}\right)}_{\text{在真实演化下}=0}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a}\cdot\delta x_a\right)\right]$ ⇒ 若作用量在空间坐标变换下不变, 则 $\sum p_{(\alpha)}\cdot\delta x_{(\alpha)}=C$.

在研究空间的均匀性时, 我们需要让空间坐标整体平移. ⇒ $\delta x_{(1)}=\delta x_{(2)}=\cdots=\delta x_{(N)}=a\hat{\xi}$ ⇒ $\sum_{\alpha=1}^{N}p_{(\alpha)}\cdot(a\hat{\xi})=\text{Const}$. 由于我们研究的是质点系, 所以 $p_{(\alpha)}$ 正是牛顿力学中定义的动量,
我们称在整体平移变换下作用不变的系统具有空间均匀性. 系统在空间均匀的方向上动量守恒.

此外，所有粒子都可以绕同轴转过一个角度，$\delta x_{(a)} = \phi\hat n \times \vec x_{(a)}$，若在这种变换下作用量都保持不变 $\Rightarrow \sum p_{(a)}\cdot(\phi\hat n\times\vec x_{(a)}) = \sum\phi\hat n\cdot(\vec x_{(a)}\times\vec p_{(a)}) = \vec J_{总}\cdot\hat n = \text{Const}$

我们称在整体转动下作用量不变的系统具有绕某方向的空间各向同性，系统在此方向的总角动量守恒。

在前面我们已经提过，若拉氏量不显含时间，或时间平移 $t\to\tilde t = t+\epsilon$ 不引起拉氏量变化，则称系统有时间均匀性。时间均匀性的系统能量守恒。

>> 作用量的形式变换

显然，一组确定的运动方程可以对应多个不同的拉氏量，我们称对应同一组运动方程的拉氏量是相互等价的。（显然 $L(q,\dot q)$ 与 $cL(q,\dot q)$ 相互等价）

→ 一种最重要的等价关系：两拉氏量差一个对时间的全导：$\tilde L(q,\dot q,t) = L(q,\dot q,t) + \frac{dF(t,q)}{dt}$ 相应地，作用量变为 $\tilde S[q] = S[q] + F(q,t)\big|_{t_1}^{t_2}$，只是增加了一个常数。我们将这样的变换称作规范变换。

规范变换可用于化简拉氏量。若 $L = L(t,q,\dot q,\cdots q^{(n)})$，且 q 及其 (n-1) 阶导数在边界保持不变，我们同样有 $L \simeq L + \frac{dF(t,q,\cdots q^{(n-1)})}{dt}$

两个等价的拉氏量给出相同的运动方程，但一般不给出相同的广义动量和能量函数。令 $\tilde L = L + \frac{dF(t,q)}{dt} = L + \frac{\partial F(t,q)}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q^a}\dot q^a \Rightarrow \tilde p_a = \frac{\partial\tilde L}{\partial\dot q^a} = \frac{\partial L}{\partial\dot q^a} + \frac{\partial F}{\partial q^a} = p_a + \frac{\partial F}{\partial q^a}$

$\tilde h = \frac{\partial\tilde L}{\partial\dot q^a}\dot q^a - \tilde L = (\frac{\partial L}{\partial\dot q^a} + \frac{\partial F}{\partial q^a})\dot q^a - (L + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q^a}\dot q^a) = \frac{\partial L}{\partial\dot q^a}\dot q^a - L - \frac{\partial F}{\partial t} = h - \frac{\partial F}{\partial t}$ 这恰为电动力学中电磁势的规范变换。

我们知道，对于广义坐标变换有两种不同的观点：主动（新点老坐标）、被动（老点新坐标）。我们用被动观点讨论，令 $t\to\tilde t = \tilde t(t,q)$，$q\to\tilde q = \tilde q(t,q)$。

假定 t 不变，我们将 L 写成 $L(t,q,\dot q)\to\tilde L(t,\tilde q,\dot{\tilde q})$ ⚠注意：这只是一个坐标变换/变量替换，$\tilde L(t,\tilde q,\dot{\tilde q}) = L(t,q(t,\tilde q),\dot q(t,\tilde q,\dot{\tilde q})) = L(t,q,\dot q)$，从而 L 在数值上不变，只不过以新的坐标表示了 $\Rightarrow L(t,q,\dot q) = \tilde L(t,\tilde q,\dot{\tilde q})$。同理，在变换前后，沿同一条世界线积分，得到的作用量在数值上也相同 $S[q]\to\tilde S[\tilde q] = \int dt\,\tilde L = \int dt\,L = S[q]$，

※作用量实际上有两种不变性：

① 对坐标重参数化，$q(t)\to\tilde q(t) = \tilde q(q,t)$（例如：直角→极），之后，作用量数值不变。$S[\tilde q] = \int L(t,\tilde q,\dot{\tilde q})dt = \int L(t,q,\dot q)dt = S[q]$.

② （在相对论中）洛伦兹变换：$x^\mu(t)\to\tilde x^\mu(t) = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu(t)$ 下作用量为标量。这保证了不同惯性系看到相同的物理事件

可以看看在广义坐标的重参数化下，运动方程如何变化：由于 $\delta S[q] = -\int_{t_1}^{t_2}dt\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q^a} - \frac{\partial L}{\partial q^a}\right)\delta q^a = \delta\tilde S[\tilde q] \overset{相等}{=} -\int_{t_1}^{t_2}dt\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde L}{\partial\dot{\tilde q}^a} - \frac{\partial\tilde L}{\partial\tilde q^a}\right)\delta\tilde q^a$

并利用广义坐标的变换式：$\delta q^a = \frac{\partial q^a}{\partial\tilde q^b}\delta\tilde q^b$ $\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tilde L}{\partial\dot{\tilde q}^a}\right) - \frac{\partial\tilde L}{\partial\tilde q^a} = \frac{\partial q^b}{\partial\tilde q^a}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q^b}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^b}\right) = 0$ 故运动方程在广义坐标变换下保持形式不变。

我们可以写下泛函导数（即运动方程的整体）在坐标变换下的变换式：$\frac{\delta\tilde S}{\delta\tilde q^a} = \frac{\partial q^b}{\partial\tilde q^a}\frac{\delta S}{\delta q^b} = 0$。我们可以发现它和协变矢量一样变换。

>> 对称性：在变换下的不变性

我们先看一下普通函数的对称性。函数的极值 $\delta F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)\cdot\delta\vec x_i = 0$，$\forall\,\delta\vec x_i$，由于 $\delta\vec x_i$ 任意，所以对 $\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)$ 有限制，必然有 $\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) = 0$.

而对于对称变换 $\delta_s\vec x_i$（我们使用主动观点，同坐标系的变换），$\delta F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)\cdot\delta_s\vec x_i = 0$，从而可以求得对称变换 $\delta_s\vec x_i$，显然，它与梯度正交，沿等高线方向。

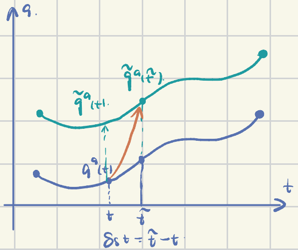
例如：对于 $z = F(x,y) = x^2+y^2$，$\delta_s\vec x = (-\epsilon y, +\epsilon x)$ 是一个对称变换。

在被动观点下，我们换坐标不只是换了一种参数化空间的方式，轨道还是那条轨道，所以拉氏量是不变的。

而现在，在主动观点下，我们要把轨道变为另一条轨道，则 L 自然要变，除非是下面说的"对称性变换"。

为什么在微分几何中，对于单参群诱导的变换，有主动被动两种视角，我们有"新点老坐标 = 老点新坐标"，是由于我们用推前映射将张量场一起进行了变换。

所以说在我们在运动状态下研究"对称变换"。 时间的变换：$t\to\tilde t=\tilde t(t,q(t),\dot q(t))$。 并变换广义坐标：$q^a(t)\to\tilde q^a(t)=\tilde q^a(t,q(t),\dot q(t))$。 若变换可由某些参数来参数化且这些参数可连续取值，则称为连续变换。这些参数取无穷小 → 无穷小变换。 对于t，其无穷小变换为 $\delta_s t=\tilde t-t$。 对于广义坐标有 $\delta_s q^a(t)=\tilde q^a(t)-q^a(t)$。 我们还定义 $\Delta q^a(t)=\tilde q^a(\tilde t)-q^a(t)$



我们有：$\Delta q^a(t)=\tilde q^a(t+\delta_s t)-q^a(t)=\underbrace{\tilde q^a(t)-q^a(t)}_{\text{一起理解的变换相当于在t时刻调整广义坐标}}+\underbrace{\delta_s t\,\dot{\tilde q}^a(t)}_{\text{再经过 }\delta_s t\text{ 时间}}$

又由于 $\tilde q^a(t)=\delta_s q^a(t)+q^a(t)\Rightarrow\dot{\tilde q}^a(t)=\frac{d}{dt}(\delta_s q^a(t))+\dot q^a(t)$. $\Rightarrow\Delta q^a=\tilde q^a(t)-q^a(t)+(\delta_s t)\cdot\left(\dot q^a(t)+\frac{d}{dt}(\delta_s q^a)\right)\approx\delta_s q^a+\dot q^a\cdot(\delta_s t)$.

定义广义坐标速度在以上两种变换下的无穷小变化. $\Delta\dot q^a(t)=\frac{d\tilde q^a(\tilde t)}{d\tilde t}-\frac{dq^a(t)}{dt}=\frac{dt}{d\tilde t}\frac{d}{dt}\left(q^a(t)+\Delta q^a(t)\right)-\dot q^a(t)$.

$$\tilde t=t+\delta_s t\Rightarrow\frac{d\tilde t}{dt}=1+\frac{d(\delta_s t)}{dt}\Rightarrow\frac{dt}{d\tilde t}=\frac{1}{1+\frac{d(\delta_s t)}{dt}}=1-\frac{d(\delta_s t)}{dt}\ll 1.$$

$$\Delta\dot q^a(t)=\left(1-\frac{d(\delta_s t)}{dt}\right)\frac{d}{dt}\left(q^a(t)+\delta_s q^a+(\delta_s t)\cdot\dot q^a\right)-\dot q^a$$

$$=\dot q^a-\frac{d(\delta_s t)}{dt}\dot q^a(t)+\frac{d}{dt}(\delta_s q^a)+\dot q^a\frac{d(\delta_s t)}{dt}+(\delta_s t)\ddot q^a-\dot q^a\Rightarrow\Delta\dot q^a=\frac{d}{dt}(\delta_s q^a)+\delta_s t\,\ddot q^a$$

下面研究在这两种变换作用下作用量的变换。我们要求：

$$\Delta S=\tilde S[\tilde q]-S[q]=\int_{\tilde t_1}^{\tilde t_2}d\tilde t\,\mathcal{L}\left(\tilde t,\tilde q(\tilde t),\frac{d\tilde q(\tilde t)}{d\tilde t}\right)-\int_{t_1}^{t_2}dt\,\mathcal{L}(t,q(t),\dot q(t))$$ 是一个时间的全导数。

计算：

$$\Delta S=\int_{t_1}^{t_2}dt\,\frac{d\tilde t}{dt}\,\mathcal{L}\left(\tilde t,\tilde q(\tilde t),\frac{d\tilde q(\tilde t)}{d\tilde t}\right)-\int_{t_1}^{t_2}L(t,q,\dot q).$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}dt\left(1+\frac{d(\delta_s t)}{dt}\right)\mathcal{L}\left(t+\delta_s t,\;q+\delta_s q+(\delta_s t)\dot q,\;\dot q+\frac{d(\delta_s q)}{dt}+(\delta_s t)\ddot q\right)-\int_{t_1}^{t_2}dt\,L(t,q,\dot q).$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}dt\left(1+\frac{d(\delta_s t)}{dt}\right)\left[\mathcal{L}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\delta_s t+\frac{\partial L}{\partial q^a}\left(\delta_s q^a+(\delta_s t)\dot q^a\right)+\frac{\partial L}{\partial\dot q^a}\left(\frac{d(\delta_s q^a)}{dt}+(\delta_s t)\ddot q^a\right)\right]-\int_{t_1}^{t_2}dt\,\mathcal{L}.$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}dt\left[\frac{\partial L}{\partial q^a}\delta_s q^a+\frac{\partial L}{\partial\dot q^a}\frac{d(\delta_s q^a)}{dt}+L\frac{d(\delta_s t)}{dt}+\left(\frac{\partial L}{\partial t}+\frac{\partial L}{\partial q^a}\dot q^a+\frac{\partial L}{\partial\dot q^a}\ddot q^a\right)\delta_s t\right].$$

利用 $\frac{\partial L}{\partial\dot q^a}\frac{d(\delta_s q^a)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q^a}\delta_s q^a\right)-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q^a}\delta_s q^a$.

整理可得到变换前后作用量等价的条件（Noether Condition）：

$$\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q^a}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q^a}\right)}_{\text{恰为作用量的泛函导数 }\frac{\delta S}{\delta q^a}}\delta_s q^a+\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q^a}\delta_s q^a+L\cdot\delta_s t\right)}_{\text{已是时间全导数}}=\frac{dF}{dt}\Rightarrow-\frac{\delta S}{\delta q^a}\delta_s q^a=\frac{dQ}{dt}$$

→在作用轨道上一点拉氏量的变化

$\{\;Q=p_a\cdot\delta_s q^a+L\cdot\delta_s t-F=p_a\Delta q^a-h\cdot\delta_s t-F.$

*像函数对称性一样，轨道 $q^a(t)$ 是任意的，而 $\delta_s q$ 则是特定的（不同轨道只是变换前后研究）。

从而，诺特条件为对广义坐标变换 $\delta_s q^a$ 满足的条件。为了判断某个变换是否为对称变换，只需判断 $\frac{\delta S}{\delta q^a}\delta_s q^a$ 是否为时间全导数的形式。

当将泛函导数 $\frac{\delta S}{\delta q^a}$ 视作协变矢量，而 $\delta_s q^a$ 视作逆变矢量，则二者内积为0。 函数（泛函）的对称变换：对称变换 $\delta_s x$（$\delta_s q$）的方向正交于函数（泛函）的梯度方向。

>> Noether's Theorem

考虑对真实轨道做一个对称变换，有：$\frac{dQ}{dt}=-\frac{\delta S}{\delta q^a}\delta_s q^a=0\Rightarrow Q=p_a\cdot\delta_s q^a+L\cdot\delta_s t-F=\text{Const}$。 Q与具体的对称变换有关，因此它并非运动积分。

对于变换与时间t无关，且变换为单参情形，有：$\delta_s t=\varepsilon\cdot\eta(t,q,\dot q)$，$\delta_s q^a=\varepsilon\cdot\xi^a(t,q,\dot q)$，而边界项 $F=\varepsilon\cdot\varphi(t,q)$。

$\Rightarrow Q^{*} \doteq \frac{1}{\varepsilon} Q = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\cdot\varepsilon\cdot\xi^a + L\cdot\varepsilon\cdot\eta - \varepsilon\cdot\varphi\right)$ $\Rightarrow$ 可以给出 $Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\xi^a + L\eta - \varphi$ 是一个运动积分. ＊若系统的作用量有连续整体对称性，则在真实世界线上必存在运动积分.

我们看一些特例：N粒子系统.

→ 平移对称性：$\delta_\xi \vec{x}_{(a)} = \varepsilon\cdot\vec{\xi}$ 对于任何一条轨迹，这样的变换都不会导致作用量发生变化 $\Rightarrow$ 这是对称变换且 $F=0$，在真实轨迹上有 $-\frac{\delta S}{\delta q^a}\cdot\delta_\xi q^a = 0 \Rightarrow Q = \mathrm{Const}$.

我们守恒量：$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\cdot\varepsilon\cdot\xi = p_a\cdot\hat{\xi}$ $\Rightarrow$ 动量在 ξ 方向守恒.

→ 旋转对称性：$\delta_\xi \vec{x}_{(a)} = \phi\,\hat{n}\times\vec{x}_{(a)}$ $Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a}(\hat{n}\times\vec{x}_{(a)}) = \sum_a \hat{n}\cdot(\vec{x}_{(a)}\times\vec{p}_{(a)})$.

→ 时间平移对称性（设时间平移后，拉氏量不变）. $\delta_\xi t = \eta$. $\delta_\xi q^a = -\eta\dot{q}^a$ 由于在变换前后只是将轨迹所处的时间后推了一点 $\Rightarrow$ 作用量不变 $\varphi=0$. 可验证此时 $Q = -h = \mathrm{Const}$.

下面我们考虑所谓标度变换：$t \to \tilde{t} = \exp(\beta)\cdot t$ $q^a(t) \to \tilde{q}^a(\tilde{t}) = \exp(\alpha)\cdot q^a(t)$. —— 选取不同的"尺子"衡量物理量.

考虑定常系统. $S[q] = \int dt\cdot\left(\frac{1}{2}G_{ab}(q)\cdot\dot{q}^a\dot{q}^b - V(q)\right)$. 进行标度变换有：

$$\tilde{S}[\tilde{q}] = \int d\tilde{t}\left(\frac{1}{2}G_{ab}(\tilde{q})\frac{d\tilde{q}^a}{d\tilde{t}}\cdot\frac{d\tilde{q}^b}{d\tilde{t}} - V(\tilde{q})\right).$$

$$= \int dt\cdot e^{\beta}\cdot\left(\frac{1}{2}G_{ab}(e^{\alpha}q)\cdot e^{2(\alpha-\beta)}\dot{q}^a\dot{q}^b - V(e^{\alpha}q)\right).$$ 设 $G_{ab}(q)$、$V(q)$ 为广义坐标之齐次函数，即 $G_{ab}(\lambda q) = \lambda^k\cdot G_{ab}(q)$. $V(\lambda q) = \lambda^p V(q)$.

可得出 S 不变的条件为：$(2+k)\alpha-\beta=0$、$p\alpha+\beta=0 \Rightarrow 2+k+p=0$. 相应的标度变换. $t \to \tilde{t} = \exp(-p\alpha)\cdot t$ $q^a(t) \to \tilde{q}^a(\tilde{t}) = \exp(\alpha)\cdot q^a(t)$.