## Day 4.

最小作用量原理

现在，我们将抛弃牛二律，转而寻找新的力学规律。首先我们要说明，牛二律只是"半个"物理规律，而力在其中起到了连接两个物理规律的媒介的作用。例如，若粒子在重力场中，则 $m\ddot{z}=F=-mg$。我们将牛二律和重力规律结合，才有了真正的物理规律。对于很多物理系统，我们甚至无法显式地将"力"写出来，从而无法直接套用牛二律给出系统的动力学方程。所以，我们应当从某些新的原理出发，直接得到动力学方程而不引入"力"。

牛顿定律是局域的、微分的。我们现在从一个整体的视角来看问题：考虑 $(t=0,\ z=0)$ 抛出的小球，它在 $(t=t_1)$ 时刻击中 $z=z_1$ 点，则它一定沿某一确定轨迹运行。换言之，若给定初末位置，则小球的世界线唯一确定。$\Rightarrow$ 如何挑出这条特殊的世界线？$\Rightarrow$ 为每条世界线一个"指标"。

哈密顿原理：设 $s$ 自由度系统的广义坐标为 $\{q^a\}$ $a=1,\dots,s$。若系统在初末时刻的位形 $\{q(t_1)\}$，$\{q(t_2)\}$ 确定，则定义连接这两个事件的世界线的作用量（Action）为：$S[q]=\int_{t_1}^{t_2}dt\, L(q,\dot{q},t)$，系统运动的真实世界线是作用量取极值的一条。从而系统运动方程为：$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_a}=0$

（注：这里我们暂时仅讨论完整系统）。

由于两个观者可能选择不同的广义坐标和时间参数，但一条真实的世界线在两个观者看来都应是真实的，所以，$S$ 不应依赖于具体广义坐标和时间参数选取。

定义物理系统的某个广义坐标对应的广义动量，则 $p_a=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}$ 从而运动方程写为：$\frac{dp_a}{dt}=\frac{\partial L}{\partial q_a}$

首先考虑自由粒子的作用量。自由粒子的构型空间为 $\mathbb{R}^3$ 本身。广义坐标和时间坐标合在一起就有时空坐标 $\{x^\mu\}=\{x^0,x^1,x^2,x^3\}=\{ct,x,y,z\}$。

由于在一位观者眼中粒子的真实轨迹必为另一位观者眼中真实轨迹 $\Rightarrow$ 在广义坐标变换与时间的重参化下，作用量保持不变。这里我们只考虑狭相中的背景时空：度规为 $\mathrm{diag}(-1,1,1,1)$。

从而作用量在 $x^\mu\to\tilde{x}^\mu=\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ 下不变。由于线元的长度为不变量 $\Rightarrow$ 最简单的作用量取法为 $S=-mc\int|ds|=-mc\int\sqrt{-\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}$

为了完成这个积分，我们找一个参数将曲线参数化，最简单的参数为曲线的线长参数：固有时 $\tau$。此时自由粒子的作用量写为：$S=-mc\int d\tau\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}}$ 称"四速度"为 $u^\mu=\frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}$

很容易看出4-速度的模方为常值：$u_\mu u^\mu=\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}=-c^2$

现在，$S=S[u^\mu]$，$L=\sqrt{-\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}$ $\left(u^\mu=\frac{dx^\mu}{d\tau}\right)$ 要令 $S$ 取极值，我们有：$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial u^\mu}\right)=0$

$$\frac{\partial L}{\partial u^\mu}=\frac{(+\frac{1}{2})\cdot 2\eta_{\mu\nu}u^\nu}{\sqrt{-\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}}$$ （这里已利用 $\eta$ 为对称的性质）$\Rightarrow\frac{du^\nu}{d\tau}=0\Rightarrow\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}=0\Rightarrow$ 自由粒子的世界线为直线

$$=\frac{\eta_{\mu\nu}u^\nu}{c}\cdot mc=mu_\mu$$

（与4-速度共轭的为4-动量）

$\Rightarrow$ 粒子的广义动量 $p_\mu=mu_\mu$。显然，自由粒子四动量守恒。

下面我们不使用线长参数来参数化世界线，由于时间永远流逝，所以不妨就使用 $t$ 来参数化。为此我们将作用量如下写：

$$S=-mc\int\sqrt{c^2(dt)^2-\delta_{ij}(dx)^i(dx)^j}=-mc^2\int dt\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\delta_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}$$

定义3-速度为空间坐标对绝对时间的变化率，从而我们有：$S=\int dt\cdot L$ $\quad L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

进行变分可得 $\frac{d^2x^i}{dt^2}=0$。

对比使用线长参数 $\tau$(固有时)和绝对时间 $t$ 写出的作用量，我们有:

$$S=-mc\int\sqrt{-\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}=-mc\int\sqrt{c^2(d\tau)^2}=-mc^2\int d\tau$$ →这个结果是自然的，在洛伦兹不变性的要求下只有线长可作为作用量。

$$S=-mc^2\int dt\sqrt{1-v^2/c^2}$$ 比较一小段世界线上作用量的增量，我们立刻有: $\frac{dt}{d\tau}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\gamma$. 此即洛伦兹收缩因子.

(与3-速度相对应的3-动量)

求广义动量: $p_i=\frac{\partial L}{\partial v_i}=\frac{\partial}{\partial v_i}\left(-mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}\right)=\gamma\cdot mv_i\approx mv_i$. 从而粒子4-动量的空间分量为3-动量.

对于4-动量的时间分量，定义 $E=c\cdot p^0=m\cdot c\cdot u^0=mc^2\cdot\frac{dt}{d\tau}=\gamma mc^2$ 为粒子能量. 从而 $p_\mu p^\mu=-(p^0)^2+\delta_{ij}p^ip^j=-\frac{E^2}{c^2}+p^2$，而 $p_\mu p^\mu=m^2u_\mu u^\mu=-m^2c^2\Rightarrow E^2=p^2c^2+m^2c^4$. (相对论能动关系)

对于以上情形在宏观、低速下极限，则 $E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\approx mc^2+\frac12mv^2+\cdots$ (静能+牛顿动能).

同理，我们可以展开作用量 $S=-mc^2\int dt+\int dt\left(\frac12mv^2+\cdots\right)$ 有意义的贡献部分为 $S=\int\frac12mv^2\cdot dt$. 在非相对论极限下 $\frac12mv^2$ 为 $\mathbb{R}^3,\delta_{ab}$ 中标量.

下面研究粒子与外部环境的相互作用，考虑外场对粒子的影响。最简单的方式是使线元的长度发生变化 $|ds|\to\exp(\phi)|ds|$，$\phi=\phi(t,x)=\phi(\vec x)$.

⇒作用量: $S=-mc\int d\tau\cdot\exp(\phi(x))\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\cdot\frac{dx^\nu}{d\tau}}$ 对它进行变分. 由于 $S=S(x,\frac{dx}{d\tau})$. 所以直接代入 E-L 方程:

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu}=-\exp(\phi(x))\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^\mu}\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot x^\mu\dot x^\nu}=$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot x^\mu}=\exp(\phi(x))\frac{\eta_{\mu\nu}\cdot\dot x^\nu}{\sqrt{-\eta_{\rho\sigma}\cdot\dot x^\rho\dot x^\sigma}}=\frac{1}{\sqrt{-\eta_{\rho\sigma}\dot x^\rho\dot x^\sigma}}\cdot\exp(\phi(x))\cdot\dot x_\mu\quad\Rightarrow\quad\frac{d^2x_\mu}{d\tau}+\frac{\partial\phi}{\partial x^\nu}\cdot\frac{\partial x^\nu}{\partial\tau}\cdot\frac{dx_\mu}{d\tau}+c^2\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}=0\qquad\mu=0,1,2,3.$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot x^\mu}\right)=\exp(\phi(x))\cdot\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^\nu}\cdot\frac{dx^\nu}{d\tau}+\exp(\phi(x))\cdot\ddot x_\mu$$

⚠为什么求偏导时不代入4-速度的归一化? 偏导时4-速度的4个分量都被认为是独立的.

若使用 $t$ 来参数化 ⇒ $S=-mc^2\int dt\cdot\exp(\phi(x,t))\sqrt{1-v^2/c^2}$. 此时也可以变分: $\frac{dp_i}{dt}+\frac{d\phi(x,t)}{dt}p_i+mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x^i}=0$，$i=1,2,3$.

考虑宏观低速弱场情形，令 $\frac{|v|}{c}\ll1$，$|\phi|=\frac{|U|}{mc^2}\ll1$. 从而有: $m\cdot\dot v_i=-\frac{\partial U}{\partial x_i}$. 这恰为牛顿方程. 而 $S\approx-\int dt\cdot mc^2+\int dt\left(\frac12mv^2-U\right)$. ⇒ $L=T-V$.

考虑粒子与场的作用. 最重要的是构建标量作用量. 上面我们让线长变化，在构造场与4-速度内积 ⇒ $\int d\tau A_\mu\cdot u^\mu=\int d\tau A_\mu\frac{dx^\mu}{d\tau}=\int A_\mu dx^\mu$.

从而 $S=\int\left(-mc\cdot\sqrt{-u_\mu u^\mu}+\frac{e}{c}A_\mu u^\mu\right)d\tau$.

使用 EL 方程. $\frac{\partial L}{\partial\dot x^\mu}=p_\mu+\frac{e}{c}A_\mu$  $\frac{\partial L}{\partial x^\mu}=\frac{e}{c}\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}u^\nu$ ⇒ 将A造成的影响放在一侧. $\frac{dp_\mu}{d\tau}=\frac{e}{c}F_{\mu\nu}u^\nu$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial\dot x^\mu}=\frac{dp_\mu}{d\tau}+\frac{e}{c}\cdot\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\cdot\frac{dx^\nu}{d\tau}=\frac{dp_\mu}{d\tau}+\frac{e}{c}\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}u^\nu$$

$F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$ 为电磁场的场强张量.

将4-矢 $A^\mu$ 拆成 $A^\mu=(A^0,A^i)=(\phi,\vec A)$. 从而有(使用 $t$ 来参数化) $S=\int\left(-mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}-e\phi+\frac{e}{c}\vec v\cdot\vec A\right)dt$.

$$\frac{\partial L}{\partial\vec r}=\nabla\left(\frac{e}{c}\vec v\cdot\vec A-e\phi\right)=\frac{e}{c}\nabla(\vec v\cdot\vec A)-e\nabla\phi=e\left(\frac1c\vec v\times(\nabla\times\vec A)+\frac1c(\vec v\cdot\nabla)\vec A-\nabla\phi\right)$$

另一例: $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\vec{v} + \frac{e}{c}\vec{A}$, (已使用用匪通的)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\quad) + \left(\frac{dr}{dt}\cdot\nabla\right)(\quad) = m\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{e}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{e}{c}(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A}$$

整理以上各式, 有: $m\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t} = -\frac{e}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{e}{c}\vec{v}\cdot(\nabla\times\vec{A}) - e\nabla\phi$ 若取 $E=-\nabla\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$. $B=\nabla\times\vec{A}$.

$\Rightarrow m\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial t^2} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = e\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}$, 这正是非相对论情形下粒子的运动方程.

($\vec{r}$的分别记法)

下面看引力场. 有引力的时候度规并非闭合度规. $\Rightarrow S=-mc\int\sqrt{-g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}$ 这样的曲线称为"测地线". 在经典而言的. 可以证明牛顿引力中的作用量:

$S=\int dt(T-V)$. $T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)$, $V(r)=-G\frac{Mm}{r}$.

根据以上讨论, 我们会发现非相对论情形下作用量写为: $S=\int dt(T-V)=\int dt\,L$.

由于质点系的动能 $T=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{1}{2}m_{(\alpha)}v_{(\alpha)}^2$ $\quad v_{(\alpha)}=\frac{\partial x_{(\alpha)}}{\partial q_{(\alpha)}}\cdot\frac{dq_{(\alpha)}}{dt}+\frac{\partial x_{(\alpha)}}{\partial t}$ $\Rightarrow T=\frac{1}{2}G_{ab}(t,q)\dot{q}_a\dot{q}_b+X_a\dot{q}_a+Y$. 为广义速度二次型. $V=V(q)$.

* 对于定常约束, 从x到q的变换不显含时间 $\Rightarrow L=\frac{1}{2}G_{ab}(q)\dot{q}^a\dot{q}^b-V(q)$. 对比欧氏 $\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\delta_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j \Rightarrow G(q)$ 为构型空间中度规.

由E-L方程: $\frac{\partial L}{\partial q^a}=-\frac{\partial V}{\partial q^a}+\frac{\partial G_{bc}(q)}{\partial q_a}\dot{q}_b\dot{q}_c$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}=G_{ab}(q)\dot{q}_b$ $\quad$ ($G_{ab}$为对称阵)

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}\right)=G_{ab}(q)\ddot{q}_b+\frac{\partial G_{ab}(q)}{\partial q_c}\dot{q}_b\dot{q}_c$

$\Rightarrow$ 运动方程: $g_{ab}\ddot{q}^b+\frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c}\dot{q}^b\dot{q}^c-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{bc}}{\partial q^a}\dot{q}^b\dot{q}^c+\frac{\partial V}{\partial q^a}=0$

换指标: $a\to d$. $g_{db}\ddot{q}^b+\underbrace{\frac{\partial g_{db}}{\partial q^c}\dot{q}^b\dot{q}^c}_{}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{bc}}{\partial q^d}\dot{q}^b\dot{q}^c+\frac{\partial V}{\partial q^d}=0$

两侧乘 $g^{ad}$.

在这里交换b.c不影响

$=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{db}}{\partial q^c}\dot{q}^b\dot{q}^c+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{dc}}{\partial q^b}\dot{q}^b\dot{q}^c$ 这里b.c地位等同

$\Rightarrow \ddot{q}^a+\Gamma^a{}_{bc}\dot{q}^b\dot{q}^c+g^{ad}\frac{\partial V}{\partial q^d}=0$. $\quad \Gamma^a{}_{bc}=\frac{1}{2}g^{ad}\left(\frac{\partial g_{db}}{\partial q^c}+\frac{\partial g_{dc}}{\partial q^b}-\frac{\partial g_{bc}}{\partial q^d}\right)$. 为Levi-Civita联络. $\Rightarrow$ 无外场时. 粒子在位形空间中沿测地线