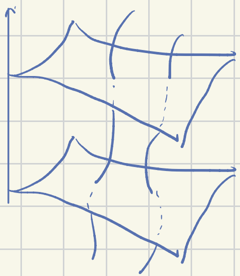
Day 2

构形空间

首先位形（构形）这个概念可以推广到连续系统 eg. 每一点的场强 $E(\vec{x})$. 系统所有可取位形的集合 称为构形空间（实际应该叫"构形流形"）.

系统的演化可以用"世界线"展示出来：



广义坐标是对构形空间的参数化. 它是一组能唯一确定某一个位形的独立参量.

称可逆变换 $q^a \to \tilde{q}^a = \tilde{q}^a(t, q)$ 为广义坐标的点变换. 有两种观点看待点变换 $\begin{cases} \text{坐标由 } q \to q' \text{, 而点不变.} \\ \text{点从 } p \to p' \text{. 且有 } q|_{p'} = q'|_{p} \text{.} \end{cases}$

（广相中也有 = 表示新分量 = 新系分量）.

若我们通过测量函数在某点处的导数来确定其函数形式, 则我们需要测量无穷阶导. 幸运的是, 牛二告诉我们: $\vec{F} = m\vec{a}$.
即二阶(及以上)导由 $\vec{F}$ 决定. $\vec{F}$ 往往又由 $\vec{v}, \vec{x}$ 决定 $\Rightarrow$ 我们有 $f''(t) = F(f(t), f'(t))$. 从而我们只需测 0,1 阶导即可.

因此, 确定一个力学系统随时间的演化只需两个初始条件: 位置, 速度. 定义广义速度: $v^a = \frac{dq^a(t)}{dt} = \dot{q}^a$,
可以将位置与速度合在一起, 称作系统"状态". $\longrightarrow$ 状态空间(相空间). $\to$ 类比世界线, 有不相交的"相流".

广义坐标变换自然诱导广义速度变换. $\dot{\tilde{q}}^\alpha = \frac{d\tilde{q}^\alpha}{dt} = \sum_{b=1}^{s} \frac{\partial \tilde{q}^a}{\partial q^b} \cdot \dot{q}^b + \frac{\partial \tilde{q}^a}{\partial t}$. 还可以直接看出: $\frac{\partial \dot{\tilde{q}}^\alpha}{\partial \dot{q}^b} = \frac{\partial \tilde{q}^\alpha}{\partial q^b}$ $\Rightarrow$ 矢量在坐标变换下的分量变换.

物理系统只可以达状态空间中的一部分 $\to$ "约束". $\phi(t, q^a, \dot{q}^a) = 0$. 不显含 t $\Rightarrow$ 定常. 一个定常约束可以通过换进一个动系变成非定常.
不等式约束 $\to$ "单侧" 而等式 $\to$ "双侧". 我们称对系统位形做出的直接限制称为"完整约束". $\phi(t, q^1 \dots q^m) = 0$.
< 非完整约束: 对系统从位形空间中一点演化至另一点的路径的"限制"

考虑 对 $\phi(q, t)$ 做变分 $\Rightarrow$ 为使 $\phi(q, t) = 0$ 满足, 应有 $\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial \phi}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha = 0$ $\Rightarrow$ 广义坐标的变分非独立. 由于 $[\frac{\partial \phi}{\partial q^a} \dots]$ 为曲面法矢, 所以可得虚位移与其正交.
对于完整系统, 约束方程直接降低广义坐标数目, 而对于非完整系统, 约束降低了"虚位移"的独立分量. eg. 对于"纯滚轮". $\begin{cases} \delta x - R\cos\theta\, \delta\phi = 0 \\ \delta y - R\sin\theta\, \delta\phi = 0 \end{cases}$
$\Rightarrow$ 我们将自由度定义为广义坐标"变分"的独立数目(独立"虚位移"数目).

Day 3

相对论时空观

我们可以用4个实数 $\{x^{0,1,2,3}\} = \{ct, x, y, z\}$ 将时空参数化。显然，一个粒子在时空中的运动对应其"世界线"。

由于任意空间在局部上与 $\mathbb{R}^n$ 同胚，故取空间中无限接近两点，它们之间线元模方有如下形式：$(ds)^2 = g_{\mu\nu}(dq)^\mu(dq)^\nu$。这里 $g_{\mu\nu}$ 为度规，它是对称的 ($g_{\mu\nu}=g_{\nu\mu}$)，且为可逆的。

我们使用上标 g^{ab} 表示度规的逆。我们显然有 $g^{ac}g_{cb}=\delta^a{}_b$。而在狭相中，我们使用的时空度规在坐标基底下的分量为 $\mathrm{diag}(-1,1,1,1)$。

而度规可用于指标升降。e.g. $A_a = g_{ab}A^b$。两矢量内积定义为：$A\cdot B = g_{ab}A^aB^b$。对于闵氏时空，有 $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$。任意协变量和逆变量的缩并都是洛伦兹变换下不变量。

在进行物理现象的观测时，我们需要"观者"。一个观者就是一个粒子(显然，观者也有其世界线)，该世界线的弧长参数被称为该观者的固有时(proper time)。

从而有：$\tau \to x^\mu = x^\mu(\tau)$，$\|ds\| = c\,d\tau$。每个"观者"的作用是，若在自己的世界线上有一事件发生，则它将"观测"这一事件。若我们希望观测某一时空区域内全部事件，则应在区域内处处设置观者(约定它们的世界线不相交)。这些观者的集合称为参考系。 惯性系：时间均匀流逝，空间各向同性。

伽利略相对性原理：物理量依赖于具体坐标，在不同惯性系中的值一般不同，而物理规律在所有惯性系中表达相同。

伽利略变换：$x^\mu \to \tilde{x}^\mu = \Gamma^\mu{}_\nu x^\nu$。 $\Gamma^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & 1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 时空线元 $(ds)^2 = -c^2(dt)^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j$ 在该变换下显然并非不变量。