Day 17. Integrable Systems.

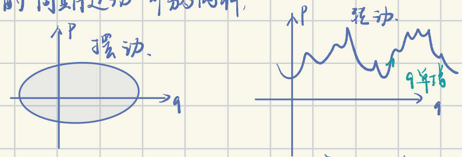
哈氏方程的指引. 我们用正则变换将相流变成点. 现在我们换种角度, 试图在相空间内构造匀速直线运动. 对于定常系统, 这要求 Q 为循环坐标 $\Rightarrow \dot{Q}=\frac{\partial H}{\partial P}=\text{const}$. $P=\text{const}$.

对于 s 维系统, 若可做以上操作 $\{q,p\}\to\{\phi,J\}$, $H(q,p)\to K(J)$, 使新坐标 $J_a=\text{Const}$, $\phi^a=\omega^a t+\phi^a(0)$, 则称这样系统为可积系统. 这里 $[J_a,J_b]=0$.

反过来, 若可找 s 个独立的互相对易的运动常数, 则可证明该系统为可积系统. (e.g. 中心势场中粒子. H, J_3, J^2).

可以看出, 完全可积系统的轨迹为 $J_a(q,p)=\text{Const}$ 指定的超曲面. 若运动有界, 则该超曲面为 $S^1\times S^1\times\cdots S^1$. ("不变环面").

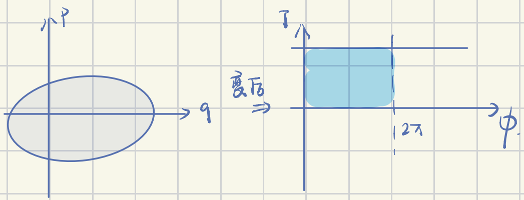
系统的"周期运动"可分为两种.

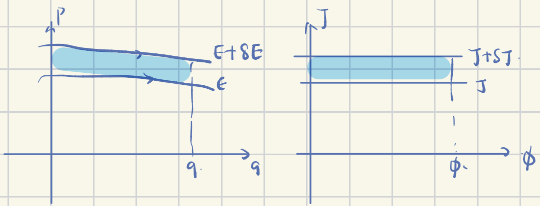


本章假设多自由度时 $W(q,\alpha,t)$ 可分离变量, 从而可分别讨论每一自由度上周期运动.

下面开始找 $\{\phi,J\}$. 对于单自由度, 考虑一周期中相流自身(或与轴)所围面积. $A(E)=\oint p(q,E)\,dq =2\pi J \Rightarrow J=\frac{1}{2\pi}\oint p\,dq$.

对于非相对论粒子有 $J(E)=\frac{1}{2\pi}\oint dq\,\sqrt{2m(E-V(q))}$.





求角变量: 考虑 $\{q,p\}$ 与 $\{\phi,J\}$ 面上两条极相近相流. 在 $\{q,p\}$ 面上面积差:

$$\delta A=\int_0^q (p+\delta p)\,dq-\int_0^p p\,dq=\int_0^p \delta p\,dq.\quad 而\ \delta p=\delta p(q,E(J))=\delta p(q,J)=\frac{\partial p(q,J)}{\partial J}\cdot\delta J.$$

$$\Rightarrow \delta A=\int_0^q \frac{\partial p(q',J)}{\partial J}\cdot\underbrace{\delta J}_{常数}\cdot dq' = \frac{\partial}{\partial J}\cdot\delta J\cdot\int_0^q p(q',J)\,dq'.$$

而在另一侧的 $\{A,J\}$ 平面上. $\delta A=\int_0^\phi \delta J\cdot d\phi=\phi\,\delta J$. [默认 $(p,q)\to(J,\phi)$].

$$\begin{cases}\delta A=\delta J\cdot\frac{\partial}{\partial J}\int_0^q p(q',J)\,dq' \\ \delta A=\delta J\cdot\phi\end{cases}\quad \Rightarrow \phi=\phi(q,J)=\frac{\partial}{\partial J}\int_0^q p(q',J)\,dq'.$$

另一方面直接读出 $\frac{\partial}{\partial q}\int_0^q p(q',J)\,dq'=p$. 这两个关系直接说明 $F_2(q,J)=\int_0^q p(q',J)\,dq'=W(q,J)$.

[w.r.t. $F_1(q,\phi)=\int_0^q p(q',J)\,dq'-\phi J$].

2型生成函数即简约作用量.

从而在一个周期中 $\Delta F_2=\Delta W=\oint p(q',J)\,dq'=2\pi J$. $\Delta F_1=0$.

由于我们研究本章中讨论的系统均可做分离变量，每个自由度上都做周期运动。$\Rightarrow J_a=\frac{1}{2\pi}\oint p_a dq^a=\frac{1}{2\pi}\oint\frac{\partial W_a(q^a,\alpha)}{\partial q^a}dq^a$。由于 J_a 仅依赖 α（q 在一个周期中被积掉）。

$\Rightarrow \alpha_a=\alpha_a(J)$。$W(q,\alpha)=W(q,\alpha(J))=W(q,J)$。由于每个自由度上都有各自的生成函数 $W_a(q^a,J_a)$，从而可以加在一起成为总生成函数 $W=\sum_a W_a(q,J)$。

从而 $\phi^a=\frac{\partial W(q,J)}{\partial J_a}=\phi^a(q,J)$。$\dot\phi^a=\frac{\partial K}{\partial J_a}=\omega^a$。$\phi^a(t)=\omega^a t+\phi(0)$。假设系统做周期性运动，在时间 T_0 各自由度历经 n_a 个循环。ϕ^a 各自变化为：

$\Delta\phi^a=\oint\sum_{b=1}^{s}\frac{\partial\phi^a}{\partial q^b}dq^b=\oint\sum_b\frac{\partial^2 W}{\partial J_a\partial q^b}dq^b=\frac{\partial}{\partial J_a}\oint\sum_b\frac{\partial W}{\partial q^b}dq^b=\frac{\partial}{\partial J_a}\oint\sum_b p_b dq^b$ 对 q^b 积分利用 $\oint p_b dq^b$。对于指定的指标 b 有：$\oint p_b dq^b=n_b\cdot 2\pi J_b$。$\Rightarrow\Delta\phi^a=\frac{\partial}{\partial J_a}\sum_b n_b\cdot 2\pi J_b=2\pi n_a$。

从而看出 $\Delta\phi^a$ 确实转过了 n_a 个 2π。

现在考虑 H 含时的可积系统。当 H 的含时可以被视作微扰处理（(a) 系统仍做近似周期运动 (b) 在每个周期内，H 变化很小），则仍可用上述方式处理。具体而言，设 H 依赖于 $\lambda(t)$。定义 $\lambda(t)$ 发生变化的特征时间为 $\frac{1}{\tau}=\left|\frac{\dot\lambda}{\lambda}\right|$。系统做大的周期运动的周期为 T，则 $T\left|\frac{\dot\lambda}{\lambda}\right|\ll 1$ 称为"绝热条件"。

完全追踪这样含时系统的运动困难，我们关注在 $\lambda(t)$ 变化中近似不变的量（"绝热不变量"）。

对于 $H=H(q,p,\lambda)$ 的系统，给定一个 λ，都可找出对应的 II 生成 $W(q,J,\lambda)$ 或 I 生成 $F_1(q,\phi,\lambda)=W(q,J,\lambda)-\phi J$。变换后，$K=K(J,\lambda)$。若取 $\lambda=\lambda(t)$，我们也有：

$p=\frac{\partial W(q,J,\lambda(t))}{\partial q}$ $\quad\phi=\frac{\partial W(q,J,\lambda(t))}{\partial J}$ $\quad J=\frac{1}{2\pi}\oint p\,dq$ [注意：此时 J 并非平稳运动常数，φ 也非平稳循环坐标，这只是一种近似 / 一种形式替代，在这种情形下有效]

$K(\phi,J,t)=H(J,\lambda(t))+\frac{\partial W(q,J,\lambda(t))}{\partial t}=H(J,\lambda(t))+\frac{\partial W(q,J,\lambda(t))}{\partial\lambda(t)}\frac{d\lambda(t)}{dt}=H(J,\lambda(t))+\Lambda(\phi,J,\lambda(t))\dot\lambda(t)$。q 换 φ 这由于可通过 $\phi=\frac{\partial W}{\partial J}$ 反解。*针对后面等号，用代入 q，理解成是对 $W=W(q,J,\lambda)$。

从而使用新的 K 给出作用变量的运动方程 $\dot J=-\frac{\partial K(\phi,J,t)}{\partial\phi}=-\dot\lambda\frac{\partial\Lambda(\phi,J,t)}{\partial\phi}$。I $\dot\lambda=0\Rightarrow\dot J=0$，即仅在 $\dot\lambda$ 非 0 时变。我们希望研究 J 在一个周期内均值

由于 $\dot\lambda$ 近似在一周期内不变，从而 $\langle\dot J\rangle=-\langle\dot\lambda\frac{\partial\Lambda(\phi,J,\lambda)}{\partial\phi}\rangle=-\dot\lambda\langle\frac{\partial\Lambda}{\partial\phi}\rangle=-\frac{\dot\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\Lambda(\phi,J,\lambda)}{\partial\phi}=-\frac{\dot\lambda}{2\pi}[\Lambda(2\pi,J,\lambda)-\Lambda(0,J,\lambda)]$

下面用小技巧：$\Lambda=\frac{\partial W(q,J,\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{\partial F_2(q,J,\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{\partial(F_2(q,J,\lambda)-\phi J)}{\partial\lambda}=\frac{\partial F_1(q,J,\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{\partial F_1(q,\phi,\lambda)}{\partial\lambda}$ 而 F_1 为 φ 的周期函数。$\Rightarrow\Lambda(q,J,\lambda)$ 也为 φ 的周期函数 $\Rightarrow\langle\dot J\rangle=0$

从而作用变量为绝热不变量。 我们还可讨论角变量的变化。 $\dot\phi=\frac{\partial K}{\partial J}=\omega(J,\lambda)+\frac{\partial\Lambda(\phi,J,\lambda)}{\partial J}\dot\lambda$ 在 λ 与 φ 无关时可直接积分。否则，仍应考虑角变量的平均变化。

记 $A(J,\lambda)=\left\langle\frac{\partial\Lambda(\phi,J,\lambda)}{\partial J}\right\rangle$ $\Rightarrow\langle\dot\phi\rangle=\omega(J,\lambda)+A(J,\lambda)\dot\lambda$ 若 λ 的变化历经一个循环，换言之 $\lambda(T)=\lambda(0)$，则在这一段时间内角变量的平均变化

$\langle\Delta\phi\rangle=\int_0^T\omega(J,\lambda)dt+\underbrace{\oint_{C_\lambda}A(J,\lambda)d\lambda}_{\text{来自λ自身变化 Hannay Angle}}$

之前定义 Λ 的时候是先对 λ 偏导再换变量，也可以一上来换变量 $\tilde W(\phi,J,\lambda)=W(q(\phi,J,\lambda),J,\lambda)$。

从而 $\frac{\partial\tilde W(\phi,J,\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{\partial W}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial\lambda}+\frac{\partial W}{\partial\lambda}\Rightarrow\Lambda=\frac{\partial\tilde W}{\partial\lambda}-p\frac{\partial q}{\partial\lambda}$

$d\tilde W$（λ 历经一循环，这部分为 0）

从而 $\Delta_H\phi=\oint_{C_\lambda}\left\langle\frac{\partial\Lambda}{\partial J}\right\rangle d\lambda=\frac{\partial}{\partial J}\oint_{C_\lambda}\langle\Lambda\rangle d\lambda=\frac{\partial}{\partial J}\left\langle\oint_{C_\lambda}\frac{\partial\tilde W}{\partial\lambda}d\lambda-\oint_{C_\lambda}p\frac{\partial q}{\partial\lambda}d\lambda\right\rangle=-\frac{\partial}{\partial J}\oint_{C_\lambda}\langle p\cdot dq(\phi,J,\lambda)\rangle$

$\Delta_H\phi$ 还有一个表达式：设 $\phi(q,p,\lambda)$ 看作相空间标量场，$\dot\phi=[\phi,H]_{\{q,p\}}+\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}\dot\lambda$ 而 $[\phi,H]_{\{q,p\}}=\omega(J,\lambda)$。与前面对比，$\frac{\partial\Lambda(\phi,J,\lambda)}{\partial J}=\frac{\partial\phi(q,p,\lambda)}{\partial\lambda}$

$\Rightarrow\Delta_H\phi=\oint_{C_\lambda}\left\langle\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}\right\rangle d\lambda$