Day 14.

辛结构与泊松括号

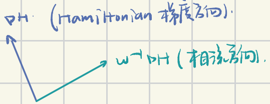
Hamilton Eq. 看上去不对称 ($q\leftrightarrow p$, $p\leftrightarrow q$ 且有负号).
$$\begin{cases}\dot{q}=\dfrac{\partial H}{\partial p}\\ \dot{p}=-\dfrac{\partial H}{\partial q}\end{cases}$$
→ 相空间内禀反称几何结构. 对于单自由度情形有 $\begin{pmatrix}\dot q\\ \dot p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial H}{\partial q}\\ \frac{\partial H}{\partial p}\end{pmatrix}$.

推广至任意 s 维的时候, 方程都可以类似形式写出. 将广义坐标、广义动量以统一的形式表达: $\{q^1\cdots q^s, p^1\cdots p^s\}$ ⇓ $\{\xi^1\cdots\xi^s, \xi^{s+1}\cdots\xi^{2s}\}$

$$\omega^{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}\vec{0}_{s\times s} & \vec{1}_{s\times s}\\ -\vec{1}_{s\times s} & \vec{0}_{s\times s}\end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\xi}^\alpha=\omega^{\alpha\beta}\frac{\partial H}{\partial\xi^\beta}$$

容易验证 $\omega^T=-\omega=\omega^{-1}$. 或 $\omega_{\beta\alpha}=-\omega_{\alpha\beta}=(\omega^{-1})_{\alpha\beta}=\underline{\delta_{\alpha\rho}}\cdot\underline{\delta_{\beta\sigma}}\cdot\omega^{\rho\sigma}$ 用δ降指标 + 习惯上. 用 ω 代表 $\omega_{\alpha\beta}$. 用 ω^{-1} 代表 $\omega^{\alpha\beta}$ (与度规一样). 从 ω 的具体形式可知: $\underline{\det\omega=1}$

$\left(\overrightarrow{\frac{\partial H}{\partial\xi^\alpha}}\right)$ 可称作 能量函数 H 在相空间中的梯度. 定义 Hamilton 矢量场 $X_H{}^\alpha=\omega^{\alpha\beta}\cdot\frac{\partial H}{\partial\xi^\beta}$. 则有: $\dot{\xi}^\alpha=X_H{}^\alpha$. 或写成 $\dot{\vec\xi}=\omega^{-1}\nabla H=\vec{X}_H$



在直观几何意义上. ω^{-1} 的作用是将 ∇H 转90°. 转至相流方向.

我们知道, 利用度规可以定义两个矢量的内积 $g_{ab}A^aB^b$. 我们要求度规 g_{ab} 为对称的. 现在. ω_{ab} 反称、但仍可起到类似作用. 定义相空间中矢量 X_α. Y_β 的辛内积为 $\omega^{\alpha\beta}X_\alpha Y_\beta$. (辛: symplectic.)
这实际上是辛形式 ω 作用于两个矢量后的结果 ($\omega(u,v)$). 它的几何意义是将 u, v 投影至各个正则平面 (q_i, p_i) ($i=1,\cdots s$). 所得的各平面内有向面积之和.
当两个矢量都属于可观测量的梯度. 如 $X_\alpha=\frac{\partial f}{\partial\xi^\alpha}$. $Y_\alpha=\frac{\partial g}{\partial\xi^\alpha}$. 则这两个矢量的辛内积写为 $[f, g]:=\omega^{\alpha\beta}\frac{\partial f}{\partial\xi^\alpha}\cdot\frac{\partial g}{\partial\xi^\beta}$. 被称为力学量 f, g 的 classical commutator / poission bracket.
它的几何意义显然为 ∇f 和 ∇g 在各个正则平面上投影的有向面积之和. 实际计算中用具体形式 $[f,g]=\frac{\partial f}{\partial q^\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial g}{\partial q^\alpha}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}$.

泊松括号的性质:

① 反对称性. 由于 $\omega_{\alpha\beta}$ 的反称性. 我们自然有. $[f,g]=-[g,f]$.

② 双线性. $[af+bg, h]=a[f,h]+b[g,h]$. 对于两个 slot 都是如此.

③ Leibniz rule. 由于它的定义中包含对两个 slot 中函数的求导. 我们有: $[fg,h]=f[g,h]+g[f,h]$. 根据定义. $[\cdot,g]$ 和 $[f,\cdot]$ 可视为一个求导运算.

④ Jacobi Identity. $[[f,g],h]+[[g,h],f]+[[h,f],g]=0$. 对于第二 slot 同样

⑤ Chain rule. $[F(f),g]=\frac{\partial F}{\partial f}[f,g]$. $[f,G(g)]=[f,g]\cdot\frac{\partial G}{\partial g}$.

⑥ 对参数的偏导数. $\frac{\partial[f,g]}{\partial\lambda}=[\frac{\partial f}{\partial\lambda},g]+[f,\frac{\partial g}{\partial\lambda}]$.

证一下⑥. 记 $f=f(\lambda,\xi)$, $g=g(\lambda,\xi)$.

$[\frac{\partial f}{\partial\lambda},g]=\omega^{\alpha\beta}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\cdot\partial\xi^\alpha}\cdot\frac{\partial g}{\partial\xi^\beta}$. $[f,\frac{\partial g}{\partial\lambda}]=\omega^{\alpha\beta}\cdot\frac{\partial f}{\partial\xi^\alpha}\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial\lambda\partial\xi^\beta}$. 显然得证.

下面给出一些基本的泊松括号. 在得到它们之后. 其他泊松括号可根据基本括号和性质得到.

考虑力学量与相空间坐标 $[\xi^\alpha,f]=\omega^{\rho\beta}\cdot\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial\xi^\rho}\cdot\frac{\partial f}{\partial\xi^\beta}=\omega^{\alpha\beta}\cdot\frac{\partial f}{\partial\xi^\beta}\Rightarrow[\xi^\alpha,\bullet]=\omega^{\alpha\beta}\frac{\partial\bullet}{\partial\xi^\beta}$. 用指标具体写出有: $[q^\alpha,\bullet]=\frac{\partial\bullet}{\partial p_\alpha}$. $[p^\alpha,\bullet]=-\frac{\partial\bullet}{\partial q^\alpha}$.

另外，利用 Chain rule：$[f,g] = \frac{\partial f}{\partial \xi^\alpha}\cdot\frac{\partial g}{\partial \xi^\beta}[\xi^\alpha,\xi^\beta]$ $\Rightarrow$ 由定义直接对比得 $[\xi^\alpha,\xi^\beta]=\omega^{\alpha\beta}$，具体写开有：$[q^a,q^b]=0$. $[p_a,p_b]=0$. $[q^a,p_b]=\delta^a{}_b$.

下面考虑力学量随时演化。$\dot f = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot\xi^\alpha \frac{\partial f}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial f}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \xi^\alpha}\omega^{\alpha\beta}\frac{\partial H}{\partial \xi^\beta}}_{[f,H]}$ $\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+[f,H]$ 若一不显含时间的力学量 f 是运动常数 $\Rightarrow [f,H]=0$，或称 f 与 H 对易 (commute).

例：若 H 不显含 q^a，则与之对应的 p_a 守恒：$\dot p_a = [p_a,H] = -\frac{\partial H}{\partial q^a}=0$

考虑 H 的演化。$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}+[H,H]=\frac{\partial H}{\partial t}$.

下面给出用泊松括号"生成"新运动常数的方法。考虑 $\frac{d[f,g]}{dt}=\frac{\partial[f,g]}{\partial t}+[[f,g],H]=[\frac{\partial f}{\partial t},g]+[f,\frac{\partial g}{\partial t}]+[[f,g],H]$.

$\Rightarrow \frac{d[f,g]}{dt}=[\frac{\partial f}{\partial t},g]+[f,\frac{\partial g}{\partial t}]-[[g,H],f]-[[H,f],g] = [\frac{\partial f}{\partial t}+[f,H],g]+[f,\frac{\partial g}{\partial t}+[g,H]]$ $\Rightarrow * \ \frac{d[f,g]}{dt}=[\frac{df}{dt},g]+[f,\frac{dg}{dt}]$.

从而若 $\frac{df}{dt}=0$, $\frac{dg}{dt}=0$ $\Rightarrow \frac{d[f,g]}{dt}=0$. 这可以生成新的运动常数。由于 s 自由度系统只有 $2s-1$ 个运动常数，所以生成过程不可无限进行。最终将有"完备"集合 $\{c_1,\dots,c_N\}$.

对于其中任意有 $[c_i,c_j]=\sum_{k=1}^{N} f_{ij}{}^k c_k$. $f_{ij}{}^k$ 称为"结构常数"。

泊松括号的重要应用是 $(\mathbb{R}^3,\delta_{ab})$ 中角动量。角动量写为 $J^i=\varepsilon^{ijk}x_jp_k$. 有 $\varepsilon_{ijk}J^k=\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{kmn}x_mp_n=(\delta_i{}^m\delta_j{}^n-\delta_i{}^n\delta_j{}^m)x_mp_n=x_ip_j-x_jp_i$

计算 $[J^i,x^j]=[\varepsilon^{ikl}x_kp_l,x^j]=\varepsilon^{ikl}x_k[p_l,x^j]=-\varepsilon^{ikl}x_k\delta^j{}_l=-\varepsilon^{ikj}x_k=\varepsilon^{ijk}x_k$. 同理有 $[J^i,p^j]=\varepsilon^{ijk}p_k$.

$[J^i,J^j]=[J^i,\varepsilon^{jkl}x_kp_l]=\varepsilon^{jkl}[J^i,x_kp_l]=\varepsilon^{jkl}[J^i,x_k]p_l+\varepsilon^{jkl}x_k[J^i,p_l]=\varepsilon^{jkl}\varepsilon^i{}_{km}x^mp_l+\varepsilon^{jkl}\varepsilon^i{}_{lm}p^mx_k=x^ip^j-x^jp^i$ $\Rightarrow [J^i,J^j]=\varepsilon^{ijk}J_k$.

这宣告了角动量的任意两个分量不可同时作为正则变量！在量子力学中，这意味着三个分量中任意两个不存在共同本征值。

由于 x, p 只存在 3 种标量形式组合：$x^2=x_ix^i$. $p^2=p_ip^i$. $x\cdot p=x^ip_i$. 故任意标量函数 f 都由这三个组合定义。

考虑 $[J^i,x^2]=[J^i,x^j]\frac{\partial(x^2)}{\partial x^j}=2\varepsilon^{ijk}x_kx_j=\varepsilon^{i(jk)}x_kx_j=0$ 同样可验证 $[J^i,x^2]=[J^i,p^2]=[J^i,x\cdot p]=0$ 从而 $[J^i,f]=\frac{\partial f}{\partial x^2}[J^i,x^2]+\frac{\partial f}{\partial p^2}[J^i,p^2]+\frac{\partial f}{\partial(x\cdot p)}[J^i,x\cdot p]=0$.

作为直接推论 $[J^i,J^2]=0$. 相空间中任意一点上的 3 维矢量总可以表示为三个基本 3 维矢量的组合。$v=f\cdot x^i+g\cdot p^i+h\cdot J^i$. 从而 $[J^i,v^j]=\varepsilon^{ijk}v_k$.

一个特别的例子是开普勒问题。$H=\frac{p^2}{2m}-\frac{\alpha}{r}$. 从而有 $[J^i,H]=0$ 除了 H 与 J 还有一个运动常数 $A=\varepsilon^i{}_{jk}p^jJ^k-\alpha\frac{m}{r}x^i$ 可验证 $\{J^i,A^i\}$ 对于对易子封闭。这反映了 $SO(4)$ 对称性。

现在假定力学量不显含时间 $\Rightarrow \frac{df}{dt}=[f,H]$. 定义 $\hat H_{cl}\,\bullet=[\bullet,H]$. 则 $\frac{d}{dt}f=\hat H_{cl}\cdot f$

考虑更高阶导。$\frac{d^2}{dt^2}f=\frac{d}{dt}(\hat H_{cl}f)=\hat H_{cl}\hat H_{cl}f=\hat H_{cl}^2f=\frac{d}{dt}[f,H]=[[f,H],H]$.

$\frac{d^3}{dt^3}f=\frac{d}{dt}(\hat H_{cl}f)=\hat H_{cl}^3f=[[[f,H],H],H]$.

从而我们有 $\frac{d}{dt}\bullet\Leftrightarrow\hat H_{cl}\,\bullet$ 力学量在时间 η 内演化：$\delta f=\eta\cdot[f,H]=\eta\cdot\hat H_{cl}f$

$\Rightarrow [f,H]$ 的效果是生成无穷小时间演化 δf，故 H 称为无穷小演化的生成元。

$\hat H_{cl}\,\bullet$ 与时间演化等价，作用于力学量上则给出该力学量在无穷小时间内演化

对于有限时间演化，将 $f(t)$ 展开有：$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left((t-t_0)\frac{d}{dt}\right)f(t_0)=\exp((t-t_0)\frac{d}{dt})f(t_0)=\underbrace{\exp[(t-t_0)\hat H_{cl}]}_{\text{classical time evolution operator}}f(t_0)$.

理解：$f(t)=f(t_0)+(t-t_0)\hat H_{cl}f(t_0)+\frac{1}{2}(t-t_0)^2\hat H_{cl}^2f(t_0)+\dots=f(t_0)+(t-t_0)[f,H]|_{t_0}+\frac{1}{2}(t-t_0)^2[[f,H],H]|_{t_0}$.

同理，考虑欧氏空间中无穷小平移，$x^i\to x^i+\xi^i$ 做平移后力学量的变换 $\delta f=f(\vec x+\vec\xi)-f(\vec x)=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}f(\vec x)$. 由于 $[\bullet,p_i]=-\frac{\partial\bullet}{\partial q^i}$

从而定义空间无穷小平移算符 $\hat{P}_{cl,i}\,\cdot = [\cdot, p_i]$. 则 $\hat{P}_{cl,i} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x^i}$ 从而力学量在空间无穷小平移下的变换为 $\delta f = \xi^i \hat{P}_{cl,i} f(x) = \xi^i [f, p_i]$.

有有限的空间平移. $f(\vec{x}+\vec{\xi}) = \sum_{n=0} \frac{1}{n!}\left(\xi^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}\right)^n f(x) = \exp\left[\xi^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}\right] f(\vec{x})$. $\Rightarrow f(\vec{x}+\vec{\xi}) = \underbrace{\exp(\vec{\xi}\cdot\vec{\hat{P}}_{cl})}_{\text{space translation operator}} f(x)$.

对于转动,以绕z轴为例:

$$\begin{pmatrix} \delta x^1 \\ \delta x^2 \\ \delta x^3 \end{pmatrix} = \phi\, T_3 \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} & -1 & \\ 1 & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} -x^2 \\ x^1 \\ 0 \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} [x^1, T_3] \\ [x^2, T_3] \\ [x^3, T_3] \end{pmatrix}$$

从而有 $\delta x^i = \phi [x^i, T_3]$.
$\delta p^i = \phi [p^i, T_3]$.

定义 $\hat{J}_{cl,i}\,\cdot = [\cdot, J_i]$.

→ 对于任意力学量 f. 在无穷小转动后变换 $\delta f = \frac{\partial f}{\partial x^i}\delta x^i + \frac{\partial f}{\partial p^i}\delta p^i$

(偏导性质)

$= \frac{\partial f}{\partial x^i}\phi [x^i, T_3] + \frac{\partial f}{\partial p^i}\phi [p^i, T_3] \Rightarrow \underline{\underline{\phi [f, T_3]}}$

$\Rightarrow \delta f = \phi^i \hat{J}_{cl,i} f = \phi^i [f, J_i]$ 有限转动: $f(\vec{x}) = \exp(\vec{\theta}\cdot\vec{J}_{cl})\cdot f(\vec{x})$.

有一个做法. 将一对共轭变量换成三组共轭变量. $\{x^\alpha\} = \{q^1 \dots q^s ; p_1 \dots p_s ; r_1 \dots r_s\}$. 所谓"南部括号"(Nambu bracket) 用了一形式定义. $[f, g, h] = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial g}{\partial x^\beta} \cdot \frac{\partial h}{\partial x^\gamma}$.

力学量的演化写成. $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H, G]$. 需要相空间中两个 Hamiltonian H, G. 这一套表述在刚体上有些用处.