Day 13

(下半：Hamilton力学)

Hamilton 正则方程.

在前面我们已说过，$\mathcal{L}$ 中不显含 t 直接导致能量守恒的守恒，能量函数 $h(t,q,\dot q) = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q^a}}_{p_a}\dot q^a - L$.　从 $p_a(q,\dot q,t) = \frac{\partial L}{\partial \dot q^a}(q,\dot q,t)$，可以将 $\dot q$ 反解为 $\dot q^a = \dot q^a(t,q,p)$.

从而，可以定义 Hamiltonian. $H(t,q,p) = p_a\dot q^a - L$. 直接算偏导可验证 $dh = -\frac{\partial L}{\partial t}\cdot dt - \frac{\partial L}{\partial q^a}\cdot dq^a + \dot q^a\cdot dp_a$. 所以它是 $\{t, q, p\}$ 的函数.

这样的操作在数学上称为 Legendre Transformation. 考虑 s 个变量组成的函数 $\{v^1\dots v^s\} \to \mathcal{L}(\vec v)$，我们换成一组新的变量 $\{p_1\dots p_s\}$. $p_a = \frac{\partial L}{\partial v^a}(v) = p_a(v)$.

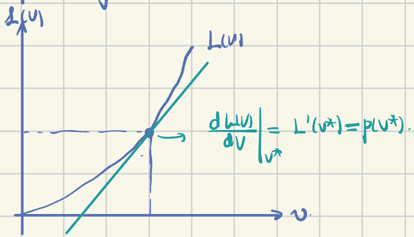
能否解出 $v = v(p)$ 与 L 有关. 由隐函数定理. 若 $\frac{\partial p_a}{\partial v^b} = \frac{\partial^2 L}{\partial v^a\,\partial v^b}$ 非退化，则可反解所有 $v^a = v^a(\vec p)$. 若 Hessian阵的秩为 r，则可以解出其中 r 个：$v^{r'} = v^a(p, v^{r+1}\dots v^s)$

在找到新变量后，$L = L(v)$ 的 Legendre Transform 定义为：$H = p_a v^a - L(v)$. 由于 p 为 v 的函数，故 H 也为 v 的函数. 但特殊的一点：旧变量 $\{\vec v\}$ 是通过 $\vec p$ 才这样"打包"进入 H.

这可以直接偏导验证：$dH = d(p_a v^a - \mathcal{L}(v))$. $= dp_a v^a + p_a dv^a - \frac{\partial L}{\partial v^a}\cdot dv^a = v^a\cdot dp_a$.　由于 H 只是 p 的函数 $\Rightarrow dH(p) = \frac{\partial H(p)}{\partial p_a}\cdot dp_a$. 从而 $(v^a - \frac{\partial H(p)}{\partial p_a})dp_a = 0$

看 Hessian阵. $\frac{\partial p_a}{\partial v^b} = \frac{\partial^2 L}{\partial v^a\partial v^b}$. 显然，若它不满秩，则各个行向量线性相关. $\Rightarrow$ 什么都得不到. 若它满秩 $\Rightarrow$ 各 dp_a 独立. 从而我们有：$v^a = \frac{\partial H(p)}{\partial p_a}$. ($s$个方程).

单变量 Legendre 的几何意义：



不妨假设 $L(v)$ 严格凸，则 $p(v^*)\nearrow$. 任给 p 可与曲线上 $(v^*, \mathcal{L}(v^*))$ 建立一一映射. 切线方程. $\mathcal{L} - \mathcal{L}(v^*) = p(v^*)(v - v^*)$.

整理可得到：$\underbrace{p(v^*)\cdot v^* - \mathcal{L}(v^*)}_{H(p)} = p(v^*)v - \mathcal{L}$.　切线在纵轴上截距 $\mathcal{L}(v=0) = -H(p)$. 因此，"横轴-纵轴"式描述变成"切线斜率-截距"式的描述.

* 正则. Canon → Canonical ("标准的"). 一般而言 物理教材/文献中的"正则"意味着按取基本模式.

设考虑正规 (Hessian 非退化) 系统 $\mathcal{L}(t,q,\dot q) \to H(t,q,p)$. $dH = \frac{\partial H}{\partial t}\cdot dt + \frac{\partial H}{\partial q^a}\cdot dq^a + \frac{\partial H}{\partial p_a}dp_a$.　利用结论有 $dH = -\frac{\partial L}{\partial t}dt - \dot p_a\cdot dq^a + \dot q^a dp_a$

$\Rightarrow \dot q^a = \frac{\partial H}{\partial p_a}$　$\dot p_a = -\frac{\partial H}{\partial q^a}$.　还有 $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$. 利用真实世界线上 $\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$. 有 $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$. 这可直接偏导验证.

在相空间中，并非每组形如 $\dot q^a = u^a(t,q,p)$，$\dot p_a = v_a(t,q,p)$ 的方程都是 Hamilton 正则方程 (都可找到 H).

根据偏导换序不变，只有在 $\frac{\partial u^a}{\partial q^b} = -\frac{\partial v_b}{\partial p_a}$. $\frac{\partial u^a}{\partial p_b} = \frac{\partial u^b}{\partial p_a}$　$\frac{\partial v_a}{\partial q^b} = \frac{\partial v_b}{\partial q^a}$. 满足时. 才能称为 Hamilton 系统.

在拉格朗日力学的速度相空间中，不是所有轨迹都可行，只有满足 $v(t) = \dot q(t)$ 的才是可行的. 简言之，位形空间中轨迹 $\{q(t)\}$ 自然诱导速度相空间中 $\{q(t), \dot q(t)\}$

因此，在位形空间中做变分时，我们只需考虑 $q(t)$ 的变分 $\delta q(t)$. 而广义速度变分. $\delta v = \delta\dot q = \frac{d}{dt}(\delta q)$. 而相空间中 $p(t)$、$q(t)$ 并无拉格朗日力学中的約束.

任一轨迹 $\{p(t), q(t)\}$ 都可行. 因此，变分 $\delta q(t)$ 与 $\delta p(t)$ 也相互独立

前面有：$H(t,q,p) = p_a\dot q^a - \mathcal{L}(q,\dot q,t)$. 可以反过来. 用相空间中轨迹 $\{q(t), p(t)\}$ 直接表示轨迹上一点的拉格朗日量. $\mathcal{L}(t,q,\dot q,p,\dot p) = p_a\dot q^a - H(t,q,p)$.

接前之. 原本 $\mathcal{L}$ 由位形空间轨迹 $\{q(t)\}$ 或 $\{q(t), \dot q(t)\}$ 参数化, 改为由相空间轨迹 $\{p(t), q(t)\}$ 参数化. 仍要求拉氏量对任意变分为0, 有:

$$\delta S[q,p] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \delta[p_a \dot q^a - H(t,q,p)] = 0$$

⚠ 反向构造的 $\mathcal{L}(t,q,\dot q,p,\dot p)$ 无法写回 $\mathcal{L}(t,q,\dot q)$ 形式.

$$d\mathcal{L}(t,q,\dot q,p,\dot p) = dp_a \dot q^a + p_a d\dot q^a - \frac{\partial H}{\partial t}dt - \frac{\partial H}{\partial q^a}dq^a - \frac{\partial H}{\partial p_a}dp_a$$

其中没有任何项可以抵消. $H(t,q,p) \to \mathcal{L}(t,q,\dot q,p,\dot p)$ 只是移项, 并非变量变换.

$$\delta S[q,p] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, [\delta p_a \dot q^a + p_a \delta\dot q^a - \delta H(t,q,p)]$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt\, \left[\delta p_a \dot q^a + \frac{d}{dt}(p_a \delta q^a) - \dot p_a \delta q^a - \frac{\partial H}{\partial q^a}\delta q^a - \frac{\partial H}{\partial p_a}\delta p_a\right]$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\left(\dot q^a - \frac{\partial H}{\partial p_a}\right)\delta p_a - \left(\dot p_a + \frac{\partial H}{\partial q^a}\right)\delta q^a\right] + (p_a \delta q^a)\Big|_{t_1}^{t_2}$$

由于边界处有 $\delta q^a(t_1) = \delta q^a(t_2) = 0 \Rightarrow$ 边界消失.

从而有: $\begin{cases} \dot p_a + \frac{\partial H}{\partial q^a} = 0 \\ \dot q^a - \frac{\partial H}{\partial p_a} = 0 \end{cases}$

我们没有要求 $\delta p_a(t_1) = \delta p_a(t_2) = 0$. 其原因是这样构造出的L中并没有 $\dot p$. 要分部积分出的对应 $q\delta p$ 边界项.

但习惯上我们要求这一点 (使q, p "平等"). 这使得相空间中每个相点对于位形空间有更好的约束.

在加了这个约束后. $\mathcal{L}(t,q,\dot q,p,\dot p)$ 也可任加一个 $\frac{dF(t,q,p)}{dt}$

系统的状态由相空间之点代表. 而可观测量则为相空间中点之函数 $f(p,q,t)$. 系统状态在相空间的轨迹称为相流. 显然对于不含时系统相流永不相交.

不动点: $\frac{\partial H}{\partial q^a} = 0$, $\frac{\partial H}{\partial p_a} = 0$ $\longrightarrow$ 椭圆点  (稳)

↘ 双曲点  (不稳).

Routh 方法: 只变一部分 $\dot q^a$ 定义 Routhian $R = \sum_{a=m+1}^{s} p_a \dot q^a - \mathcal{L}$.

直接求全微分可知:
$$\begin{cases} dR = -\frac{\partial L}{\partial t}dt - \sum_{a=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial q^a}dq^a - \sum_{a=1}^{m}\frac{\partial L}{\partial \dot q^a}d\dot q^a + \sum_{a=m+1}^{s}\dot q^a dp_a \\ dR = \frac{\partial R}{\partial t}dt + \sum_{a=1}^{s}\frac{\partial R}{\partial q^a}dq^a + \sum_{a=1}^{m}\frac{\partial R}{\partial \dot q^a}d\dot q^a + \sum_{a=m+1}^{s}\frac{\partial R}{\partial p_a}dp_a \end{cases}$$

$\Rightarrow R = R(t, q^1 \cdots q^s, \dot q^1, \cdots \dot q^m, p_{m+1} \cdots p_s)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \\ \frac{\partial R}{\partial q^a} = -\frac{\partial L}{\partial q^a} \\ \frac{\partial R}{\partial \dot q^a} = -\frac{\partial L}{\partial \dot q^a} \\ \frac{\partial R}{\partial p_a} = \dot q^a \end{cases}$$

由于 $\frac{\partial R}{\partial \dot q^a} = -\frac{\partial L}{\partial \dot q^a}$ $\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot q^a}\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^a}\right) = -\frac{\partial L}{\partial q^a} = \frac{\partial R}{\partial q^a}$ $\Rightarrow$ 对前m个广义坐标有 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot q^a}\right) - \frac{\partial R}{\partial q^a} = 0$.

同理. 对于 $m+1 \sim s$ 个广义坐标有 $\dot q^a = \frac{\partial R}{\partial p_a}$ $\quad \dot p_a = -\frac{\partial R}{\partial q^a}$.

Routh 方法可用于处理带有循环坐标的问题. 例如, 若坐标 s 为循环坐标. 则它不出现在L中. 但 $\dot q^s$ 仍出现在L中. 从而仍需求解第s个方程. 由于 $\frac{\partial H}{\partial q^s} = -\frac{\partial L}{\partial q^s}$. 故 q^s 也不出现在H中. 又有 $p_s = \alpha$. 故. $H = H(t, q^1 \cdots q^{s-1}, p_1 \cdots p_{s-1}, \alpha)$. 从而 s 自由度的系统简化至 s−1 自由度.

现在设 $\{q^1, q^2, \cdots q^m\}$ 出现在 L 中，而 $\{q^{m+1}, \cdots q^s\}$ 为循环坐标. 则 $R = R(t; q^1 \cdots q^m; \dot{q}^1 \cdots \dot{q}^m; \alpha_1 \cdots \alpha_{s-m})$. 从而只需求解 m 个坐标对应的方程 $\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial R}{\partial q^a} = 0$

还有另一个花活：将广义坐标和广义速度同时换成新坐标 $\{q, \dot{q}\} \to \{f, p\}$. 定义 $G = p_a \dot{q}^a + f_a q^a - L$.

推导可知 $dG = -\frac{\partial L}{\partial t} dt + \left(p_a - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right) d\dot{q}^a + \left(f_a - \frac{\partial L}{\partial q^a}\right) dq^a + \dot{q}^a dp_a + q^a df_a$.　由于希望 G 只是 f, p, t 的函数，我们有：$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}$（广义动量）、$f_a = \frac{\partial L}{\partial q^a}$（广义力）.

从而我们有 $G = G(t, f, p)$.
$$\begin{cases} dG = -\frac{\partial L}{\partial t} dt + q^a df_a + \dot{q}^a dp_a \\ dG = \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{\partial G}{\partial f_a} df_a + \frac{\partial G}{\partial p_a} dp_a \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad \frac{\partial G}{\partial f_a} = q^a, \quad \frac{\partial G}{\partial p_a} = \dot{q}^a$$

从而有
$$\left.\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial G}{\partial f_a}\right) - \frac{\partial G}{\partial p_a} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^a} = 0 \Rightarrow \dot{p}_a = f_a \end{cases}\right\} 2s\text{ 个一阶 ODEs}$$

* 广义动量对时间变化率 = 广义力