# Chapter 38：大结局：重走微分几何之路

#DifferentialGeometry

## 嘉当的巧妙想法

在之前研究三维曲线时，我们给出了能沿着曲线移动的坐标系：

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

这里的 $T$ 是切向，$N$ 是法向，而 $B$ 是副法向。这个方法给了我们很多有益的启发：

- 构造了一个与曲线相适应的标架
- 用标架**本身**描写标架的变化率
  现在，嘉当提出了他的"活动标架法"，将上面这个标架推广到曲面上的同时又做了许多改进。这里我们首先考察 $\mathbb{R}^3$ 中的二维曲面：
- 选择一个向量成为曲面的法向，那么我们自然得到两个切向量，也就得到了与曲面相适应的标架
- 完全解除标架的限制，使得它不仅能沿着曲面滑动，更能在 $\mathbb{R}^3$ 中以任意"可微的"方式移动，从而我们可以得到一个标架场
- 将标架用协变矢量而不是逆变矢量表示，使用协变基底本身表示协变基底的变化率。
- 嘉当得到了任意形式的结构方程，然后将它们应用到特定的几何对象上。

## 控制着标架变换的"联络"

我们首先明确哟下符号：

- 向量 $\boldsymbol{v}$
- 1-形式 $\boldsymbol{\theta}$
- 2-形式 $\boldsymbol{\Psi}$
- 矩阵 $[A]$

- 设 $\{e_i\}$ 是固定的欧几里得正交基，具有对偶的协变基底 $\{\mathbf{d}x^i\}$，$\mathbf{d}x^i(e_j)=\delta^i_j$
- 设 $\{m_i\}$ 是嘉当正交活动标架场，具有对偶的协变基底 $\{\theta^i\}$，$\theta^i(m_j)=\delta^i_j$
  提请注意：在正交基的情况下，一个逆变基底 $e_1$ 的改变仅引起与其下标相同的协变基底 $\mathbf{d}x^1$ 的改变，因此我们可以在这种情况下说一个逆变基底只与一个协变基底对偶！

那么我们现在希望用标架本身表示标架的变化率。由于此时的标架是充满了全空间的标架场，因此我们希望看看它是如何沿着 $\mathbb{R}^3$ 中的任意向量 $v$ 变化的，那么我们用一个暂时未知的矩阵 $[C]$ 表示这种变化：

$$\nabla_v[m]=[C][m]$$

由于标架的正交性，我们可以得到矩阵中的系数：

$$\omega_{ij}(v)=[C]_{ij}=(\nabla_v m_i)\cdot m_j$$

代表了标架沿着 $v$ 运动时，$m_i$ 转向 $m_j$ 的初始速率。为什么我们在这里切换符号？根据上面的符号约定，这意味着我们发现**每一个**$\omega_{ij}$ 全都是 1-形式，$\omega_{ij}$ 的下标不代表着它是 $(0,2)$ 阶张量，只代表着它在矩阵中的位置。很容易验证它们都是 1-形式，此外可以得到：

$$0=\nabla_v(\delta^i_j)=\nabla_v(m_i\cdot m_j)=\omega_{ij}(v)+\omega_{ji}(v)\Rightarrow\omega_{ij}(v)=-\omega_{ji}(v)$$

因此，装载有 1-形式的 $[\omega]$ 矩阵事实上是反对称矩阵，其中只有三个独立参数。至此，我们形式化地得到了描述标架场变换的联络方程组：

$$\nabla_v[m]=[\omega(v)][m]\quad \nabla_v m_i=\sum_j\omega_{ij}(v)m_j$$

取 $m_1=T,m_2=N,m_3=B,v=T$，可以恢复出曲线上的结果。注意：从几何关系上可以看出，一对向量 $(T,N)$ 绕着轴 $B$ 旋转，这意味着 $T$ 不会向着 $B$ 倾斜，因此有 $\omega_{13}(v)=0$。

## 描述标架场最终姿态的“姿态矩阵”

显然，如果我们要描述标架场 $\{m_i\}$ 的形态，其实只需要知道我们怎么转一转 $\{e_i\}$，使之与 $\{m_i\}$ 重合，这显然只需要一个正交的旋转矩阵来描述：

$$[m]=[A][e]$$

我们定义：一个矩阵的外导数就是其每个元素的外导数重新组成的矩阵：$\mathbf{d}[A]=[\mathbf{d}a_{ij}]$，现在我们证明联络 1-形式的矩阵可以表示为：

$$[\omega]=(\mathbf{d}[A])[A]^T \quad \omega_{ij}=\sum_k(\mathbf{d}a_{ik})a_{jk}$$

我们计算活动标架本身的转向率：

$$\nabla_v m_i=\nabla_v\sum_k a_{ik}e_k=\sum_k(\mathbf{d}a_{ik})(v)e_k$$

现在我们来看 $m_i$ 向着 $m_j$ 的方向偏离了多少，很容易发现：

$$\omega_{ij}(v)=(\nabla_v m_i)\cdot m_j=\sum_k(\mathbf{d}a_{ik}(v))a_{jk}$$

从而哦我们证明了结果。

我们举一个例子看看到目前为止我们的成果：

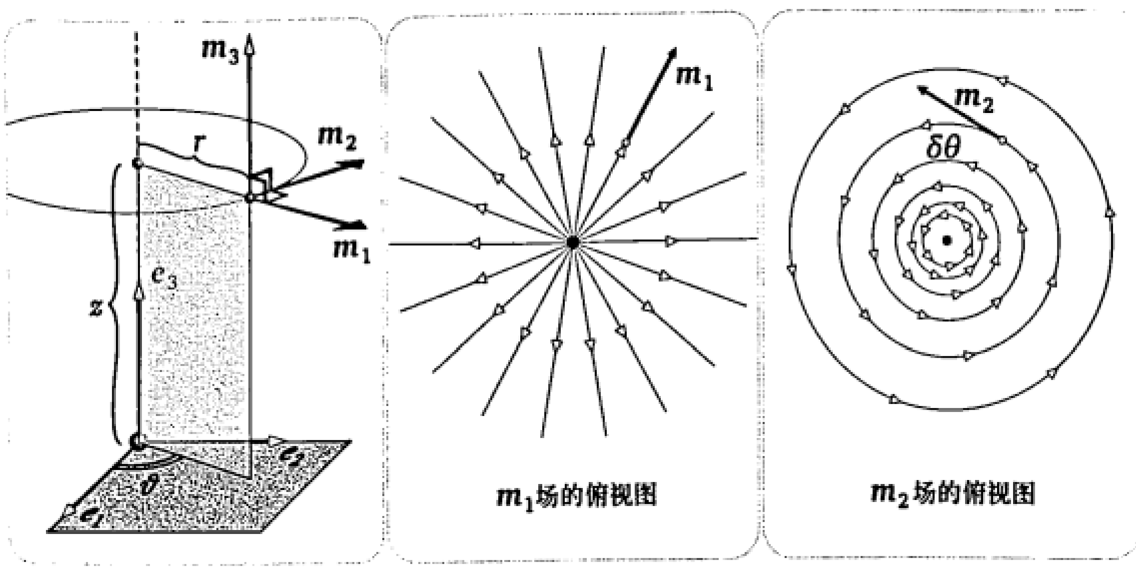


图 38-1 在左图中，基于所示的圆柱坐标系 $(r,\theta,z)$ 定义了柱面标架场. 沿 $z$ 轴从上向下看，中图显示的是 $m_1$ 场，右图显示的是 $m_2$ 场

我们构造的柱面标架场是：

$$\begin{aligned}m_1&=\cos\theta e_1+\sin\theta e_2\\ m_2&=-\sin\theta e_1+\cos\theta e_2\\ m_3&=e_3\end{aligned}$$

姿态矩阵和联络 1-形式矩阵可以被计算为：

$$
[A]=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad [\omega]=\begin{bmatrix}0 & \mathbf{d}\theta & 0\\ -\mathbf{d}\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}
$$

那么我们就得到了：

$$
\nabla_v m_1=\mathbf{d}\theta(v)m_2,\ \nabla_v m_2=-\mathbf{d}\theta(v)m_1,\ \nabla_v m_3=0
$$

从下图中，很容易用几何关系证明这一点：

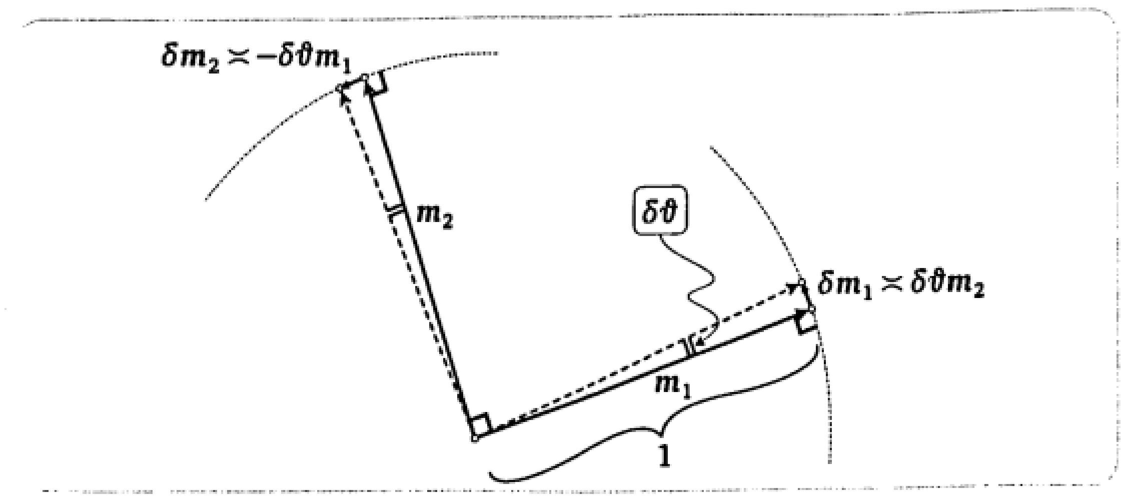


图 38-2 沿空间中的一个（最终收缩成一点的）短向量 $v$ 移动会导致一对正交向量 $(m_1,m_2)$ 产生一个（最终为零的）小旋转 $\delta\vartheta$. $m_1$ 的顶端沿图中单位圆上的圆弧移动距离 $\delta\vartheta$. 由于向量顶端最初的移动方向与自身正交，所以 $\delta m_1 \asymp \delta\vartheta m_2$. 同样可得 $\delta m_2 \asymp -\delta\vartheta m_1$

## $(\star)$ 嘉当的两个结构方程

现在，我们将使用协变基底 $\theta^i$ 代替逆变基底 $m_i$，那么，同一个旋转矩阵将 $\mathbf{d}x$ 旋转到 $\theta$

$$
[\theta]=[A][\mathbf{d}x]\quad \theta^i=\sum_j a_{ij}\mathbf{d}x^j
$$

这个证明是显然的。因为 $\theta^i$ 是 $m^i$ 的对偶，因此根据里斯表示定理：

$$
\theta^i(e_j)=m_i\cdot e_j=\left[\sum_k a_{ik}e_k\right]\cdot e_j=a_{ij}
$$

### 嘉当第一结构方程

现在，我们当然想问：对偶 1-形式 $\theta$ 在空间中是如何变化的？这正是嘉当第一结构方程

$$\mathbf{d}[\theta] = [\omega] \wedge [\theta]$$

这个证明只需要简单计算，首先我们有：

$$[\theta] = [A][\mathbf{d}x]$$

式子两侧求外导数：

$$\mathbf{d}[\theta] = \mathbf{d}[A] \wedge [\mathbf{d}x] = \mathbf{d}[A][A]^T \wedge [A][\mathbf{d}x] = [\omega] \wedge [\theta] \quad \mathbf{d}\theta^i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \theta^j$$

# 嘉当第二结构方程

我们自然也想问：控制着标架变化的联络是如何变化的，这需要嘉当第二结构方程：

$$\mathbf{d}[\omega] = [\omega] \wedge [\omega]$$

我们给一个关于外微分计算的引理，设 $f, g$ 都是函数（$0$ -形式），那么：

$$\mathbf{d}((\mathbf{d}f)g) = \mathbf{d}g \wedge \mathbf{d}f = -\mathbf{d}f \wedge \mathbf{d}g$$

现在，对联络矩阵两侧外微分：

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}[\omega] &= \mathbf{d}[(\mathbf{d}[A])[A]^T] \\
&= -(\mathbf{d}[A]) \wedge \mathbf{d}[A]^T \\
&= -(\mathbf{d}[A])[A]^T \wedge [A]\mathbf{d}[A]^T \\
&= -(\mathbf{d}[A])[A]^T \wedge [(\mathbf{d}[A])[A]^T]^T \\
&= -[\omega] \wedge [\omega]^T \\
&= [\omega] \wedge [\omega]
\end{aligned}$$

具体计算的时候我们也使用分量式：

$$\mathbf{d}\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$$

嘉当的两个结构方程可以统一地被写为：

$$\mathbf{d}[\cdot] = [\omega] \wedge [\cdot]$$

# 例子：球面标架场

我们再球面标架场上用一下两个结构方程。很容易用几何关系给出旋转矩阵 $[A]$：

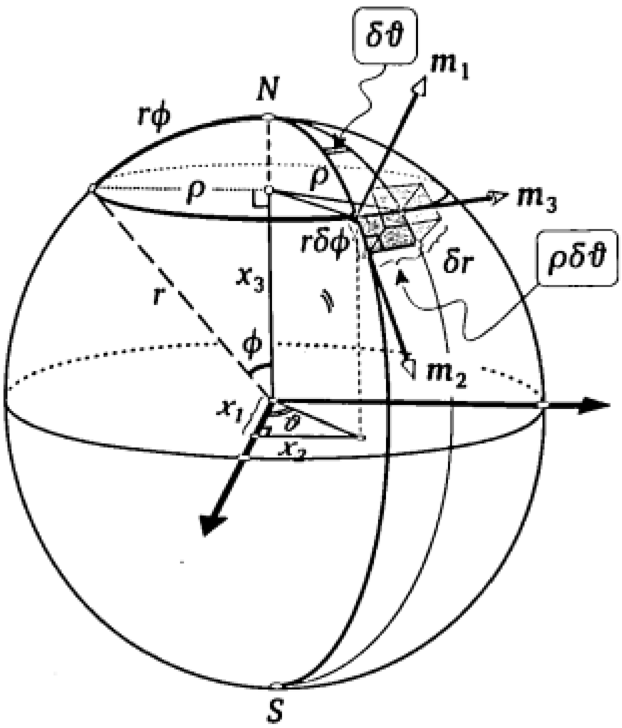


图 38-3　$\theta^1 = \mathrm{d}r$、$\theta^2 = r\mathrm{d}\phi$ 和 $\theta^3 = r\sin\phi\,\mathrm{d}\theta$ 的几何证明

$$A = \begin{bmatrix} s_\phi c_\theta & s_\phi s_\theta & c_\phi \\ c_\phi c_\theta & c_\phi s_\theta & -s_\phi \\ -s_\theta & c_\theta & 0 \end{bmatrix}$$

我们只需计算联络矩阵中三个有效的分量：

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= \mathbf{d}\phi \\ \omega_{13} &= \sin\phi\,\mathbf{d}\theta \\ \omega_{23} &= \cos\phi\,\mathbf{d}\theta \end{aligned}$$

同样，我们也可以计算与逆变标架对偶的协变基底，但是我们也可以通过几何方式找到。例如考虑图中的小平行六面体，它的对角线是：

$$v = \delta r m_1 + r\delta\phi m_2 + r s_\phi \delta\theta m_3$$

根据对偶基的定义，我们显然有：

$$\begin{aligned} \theta^1 &= \mathbf{d}r \\ \theta^2 &= r\mathbf{d}\phi \\ \theta^3 &= r s_\phi \mathbf{d}\theta \end{aligned}$$

我们可以通过分量式计算楔积，从而验证：

$$\mathbf{d}[\theta]=\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{d}r\wedge\mathbf{d}\theta\\ s_\phi\mathbf{d}r\wedge\mathbf{d}\theta+rc_\phi\mathbf{d}\phi\wedge\mathbf{d}\theta\end{bmatrix}$$

以及：

$$\mathbf{d}[\omega]=\begin{bmatrix}0&0&c_\phi\mathbf{d}\phi\wedge\mathbf{d}\theta\\ 0&0&-s_\phi\mathbf{d}\phi\wedge\mathbf{d}\theta\\ -c_\phi\mathbf{d}\phi\wedge\mathbf{d}\theta&s_\phi\mathbf{d}\phi\wedge\mathbf{d}\theta&0\end{bmatrix}$$

实际上，之前我们的联络矩阵中的分量也是可以使用一些几何方法算出来的。在 $v$ 很短的时候，$\nabla_v m_i$ 就是 $m_i$ 沿着 $v$ 从起点到终点的变化。如图，我们这里只讨论 $\omega_{12}(v)$：考虑一下 $m_1$ 沿着某个短向量 $v$ 移动时它会发生什么变化：

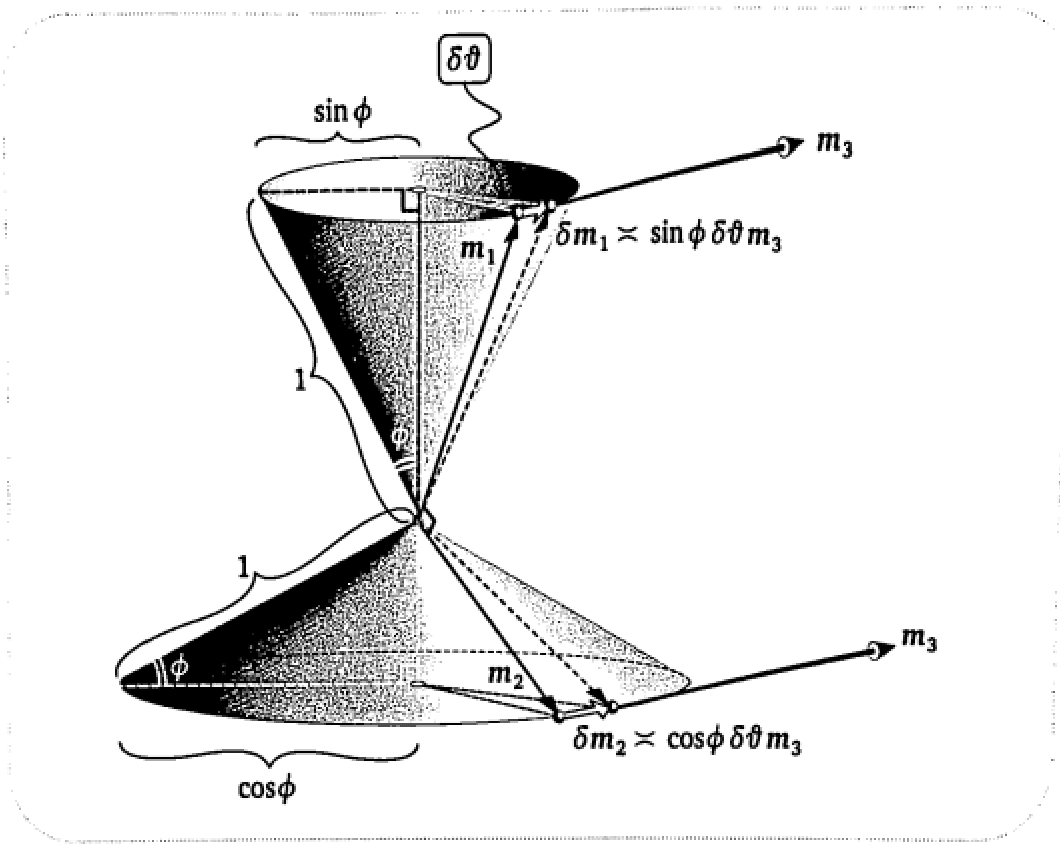


**图 38-5** 在上面的圆锥面 $\omega_{13}=\sin\phi\,d\vartheta$，在下面的圆锥面 $\omega_{23}=\cos\phi\,d\vartheta$ 的几何证明

- 沿着 $\delta r m_1$ 移动时，$m_1$ 保持不变
- 沿 $rs_\phi\delta\theta m_3$ 移动时，$m_1$ 将产生沿着 $m_3$ 方向的变化：$\delta m_1=s_\phi\delta\theta m_3$
- 沿 $r\delta\phi m_2$ 移动时，$m_1$ 将产生沿着 $m_2$ 方向的变化：$\delta m_1=\delta\phi m_2$

  总计以上，我们就能得到结论：

$$\omega_{12} = \mathbf{d}\phi$$

其余的两个元素也可以通过类似的分析得到：

$$\omega_{13} = s_\phi \mathbf{d}\theta,\ \omega_{23} = c_\phi \mathbf{d}\phi$$

## $(\star)$ 曲面的 6 个基本形式方程

我们现在要把嘉当的标架场放到曲面上，看看能得到什么。给定曲面 $\mathcal{S}$，它的法向量为 $n$，那么我们选择 $m_3 = n$，那么 $m_1, m_2$ 自然成为了曲面内向量 $v$ 的一组基底。那么我们先来看形状导数（法向量 $n$ 沿着向量 $v$ 的变化）：

$$\begin{aligned} S(v) &= -\nabla_v n \\ &= -\nabla_v m_3 \\ &= -[\nabla_v m_3 \cdot m_1]m_1 - [\nabla_{v,3} \cdot m_2]m_2 \\ &= \omega_{13}(v)m_1 + \omega_{23}(v)m_2 \end{aligned}$$

因此我们用联络矩阵中的元素表示了形状导数，形状导数的矩阵显然就是：

$$[S] = \begin{bmatrix} \omega_{13}(m_1) & \omega_{13}(m_2) \\ \omega_{23}(m_1) & \omega_{23}(m_2) \end{bmatrix}$$

我们之前所说的外在曲率就是球面映射的面积扩展因子，也就是：

$$\mathcal{K}_{ext} = \det[S] = \omega_{13}(m_1)\omega_{23}(m_1) - \omega_{13}(m_2)\omega_{23}(m_2) = (\omega_{13} \wedge \omega_{23})(m_1, m_2)$$

现在，对偶于标架场的协变基底的作用就是给出切向量 $v$ 在标架场中的坐标：
$\theta^i(v) = v \cdot m_i$，注意任意切向量 $v$ 在 $m_3$ 上的坐标都为 0.

我们现在要说明，1-形式和 2-形式的基底分解也具有唯一性，也就是说，此时曲面上的 1-形式可以唯一地分解为：

$$\phi = \phi(m_1)\theta^1 + \phi(m_2)\theta^2$$

曲面上的 2-形式则可以被唯一分解为：

$$\Psi = \Psi(m_1, m_2)\mathcal{A} = \Psi(m_1, m_2)\theta^1 \wedge \theta^2$$

那么我们有：

$$\omega_{13} \wedge \omega_{23} = (\omega_{13} \wedge \omega_{23})(m_1, m_2)\theta^1 \wedge \theta^2 = \mathcal{K}_{ext}\theta^1 \wedge \theta^2$$

这样，我们将标架场依附在曲面上之后，再次利用嘉当的第一结构方程和第二结构方程，就得到了关于曲面的六个基本方程（这些方程都可以依赖嘉当的两个结构方程计算得到）：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{d}\theta^1 &= \omega_{12} \wedge \theta^2 \\
\mathbf{d}\theta^2 &= \omega_{21} \wedge \theta^1 \\
\omega_{31} \wedge \theta^1 + \omega_{32} \wedge \theta^2 &= 0 \\
\mathbf{d}\omega_{12} &= \omega_{13} \wedge \omega_{32} \\
\mathbf{d}\omega_{13} &= \omega_{12} \wedge \omega_{23} \\
\mathbf{d}\omega_{23} &= \omega_{21} \wedge \omega_{13}
\end{aligned}
$$

# $(\star)$ 曲面的基本方程能做些什么?

刚才，我们一下子扔下了六个方程（而且，我们在讲解如何将坐标系“依附”在曲面上时是使用逆变基描述的，而这六个方程都在描述协变基和联络），现在我们一定要问：这些方程会如何帮助我们理解曲面?

## 第 3 个方程和第 $(5,6)$ 个方程

首先我们将第 3 个方程应用到曲面切平面的基向量上:

$$
\begin{aligned}
0 &= [\omega_{31} \wedge \theta^1 + \omega_{32} \wedge \theta^2](m_1, m_2) \\
&= \omega_{31}(m_1)\theta^1(m_2) - \omega_{31}(m_2)\theta^1(m_1) + \omega_{32}(m_1)\theta^2(m_2) - \omega_{32}(m_2)\theta^2(m_1) \\
&= \omega_{32}(m_1) - \omega_{31}(m_2)
\end{aligned}
$$

因此，这实际上意味着形状导数矩阵 $S$ 是一个对称矩阵（这个方程被称为对称性方程）！我们早已知道 $S$ 的本征矢量是正交的，因此这在意料之内。这些本征矢量就是取得最大、最小法曲率 $\kappa_1, \kappa_2$ 的方向!

我们现在可以将标架场的 $m_1, m_2$ 与这些方向对齐，使得:

$$
[S] = \begin{bmatrix} \omega_{13}(m_1) & \omega_{13}(m_2) \\ \omega_{23}(m_1) & \omega_{23}(m_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{bmatrix}
$$

将现在的 $\omega_{13}, \omega_{23}$ 的形式代入第 5 个基本方程，我们立刻得到:

$$
\mathbf{d}(\kappa_1\theta_1) = \omega_{12} \wedge \kappa_2\theta^2 \Rightarrow \mathbf{d}\kappa_1 \wedge \theta^1 + \kappa_1\mathbf{d}\theta^1 = \kappa_2\omega_{12} \wedge \theta^2
$$

再利用第 1 个基本方程，我们得到:

$$
\mathbf{d}\kappa_1 \wedge \theta^1 + \kappa_1\omega_{12} \wedge \theta^2 = \kappa_2\omega_{12} \wedge \theta^2 \Rightarrow \mathbf{d}\kappa_1 \wedge \theta^1 = (\kappa_2 - \kappa_1)\omega_{12} \wedge \theta^2
$$

将方程两端作用在 $(m_1, m_2)$ 上，就得到了：

$$\nabla_{m_2}\kappa_1 = (\kappa_1 - \kappa_2)\omega_{12}(m_1) \quad \nabla_{m_1}\kappa_1 = (\kappa_1 - \kappa_2)\omega_{12}(m_2)$$

它的几何意义是：当我们与某个主方向成直角运动时，主曲率的变化率正比于两个主曲率之差和主方向旋转速率的乘积。

## 第 4 个方程

第四个方程被称为高斯方程，它掌握了内蕴曲率与外在曲率联系的关键，这是因为它可以被重写为：

$$\mathbf{d}\omega_{12} = -\mathcal{K}_{ext}\theta^1 \wedge \theta^2$$

例如我们在球面上计算 $\mathbf{d}\omega_{12} = -\frac{1}{R^2}\theta^1 \wedge \theta^2$，我们立刻得到球面上的外在曲率。

## 度量曲率公式和高斯绝妙定理的证明

我们首先说明：$\omega_{12} = -\omega_{21}$ 是唯一满足第 $(1, 2)$ 这两个方程的 1-形式。证明方案很简单，直接将这两个 2-形式作用在基向量 $(m_1, m_2)$ 上，立刻得到：

$$\omega_{12}(m_1) = \mathbf{d}\theta^1(m_1, m_2) \quad \omega_{12}(m_2) = \mathbf{d}\theta^2(m_1, m_2)$$

利用一个 1-形式在一组基底下分解的唯一性立刻得到 $\omega_{12}$ 是唯一的。现在我们开始证明曲率度量公式。从一般情形下的度量公式（此时，我们已经将“网格”选在了两个正交的方向上）：

$$ds^2 = (Adu)^2 + (Bdv)^2$$

可以推导出一组协变基底：

$$\theta^1 = A\mathbf{d}u \quad \theta^2 = B\mathbf{d}v$$

面积 2-形式是：

$$\mathcal{A} = \theta^1 \wedge \theta^2 = AB\mathbf{d}u \wedge \mathbf{d}v$$

我们计算这一组协变基的外导数：

$$\mathbf{d}\theta^1 = \mathbf{d}A \wedge \mathbf{d}u = \partial_v A\mathbf{d}v \wedge \mathbf{d}u = -\frac{\partial_v A}{B}\mathbf{d}u \wedge \theta^2$$

同理我们也有：

$$\mathbf{d}\theta^2 = -\frac{\partial_u B}{A}\mathbf{d}v \wedge \theta^1$$

将其与方程 1 比较，我们立刻看到 $\omega_{12}$ 的一个可能的解是：

$$\omega_{12} = -\frac{\partial_v A}{B}\mathbf{d}u + \frac{\partial_u B}{A}\mathbf{d}v$$

对它再求外导数：

$$\mathbf{d}\omega_{12} = \frac{1}{AB}\left(\partial_v\left(\frac{\partial_v A}{B}\right) + \partial_u\left(\frac{\partial_u B}{A}\right)\right)\theta^1 \wedge \theta^2$$

将其与高斯方程（方程 4）对比，我们也就得到了：

$$\mathcal{K}_{ext} = -\frac{1}{AB}\left(\partial_v\left(\frac{\partial_v A}{B}\right) + \partial_u\left(\frac{\partial_u B}{A}\right)\right)$$

这里左侧的曲率是外在定义的，而右侧的式子却是完全内蕴的！这正是对高斯绝妙定理的一个证明。

## 一个新的曲率公式

为了简便，现在我们将 $\omega_{12}$ 写成：

$$\omega_{12} = f_1\theta^1 + f_2\theta^2 \quad f_1 = \mathbf{d}\theta^1(m_1, m_2),\ f_2 = \mathbf{d}\theta^2(m_1, m_2)$$

将 2-形式 $\mathbf{d}\omega_{12}$ 直接作用在基向量对 $(m_1, m_2)$，那么我们就得到了另一个曲率公式：

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &= -\mathbf{d}\omega_{12}(m_1, m_2) \\
&= -[\mathbf{d}f_1 \wedge \theta^1 + f_1\mathbf{d}\theta^1 + \mathbf{d}f_2 \wedge \theta^2 + f_2\mathbf{d}\theta^2](m_1, m_2) \\
&= \mathbf{d}f_1(m_2) - \mathbf{d}f_2(m_1) - f_1^2 - f_2^2 \\
&= \nabla_{m_2}f_1 - \nabla_{m_1}f_2 - f_1^2 - f_2^2
\end{aligned}$$

## 希尔伯特引理

希尔伯特证明了如果在曲面上的一点 $p$ 具有以下三个性质，那么曲面在 $p$ 点处的曲率不可能是正的：

- $\kappa_1$ 在 $p$ 处取到局部极大值
- $\kappa_2$ 在 $p$ 处取到局部最小值

- $\kappa_1(p) > \kappa_2(p)$

  我们来证明一下：由 $\kappa_1, \kappa_2$ 取极值的一阶条件得到：

  $$\nabla_{m_2}\kappa_1 = \nabla_{m_1}\kappa_2 = 0$$

  再利用二阶条件：

  $$\nabla_{m_2}\nabla_{m_2}\kappa_1 \leq 0,\ \nabla_{m_1}\nabla_{m_1}\kappa_2 \geq 0$$

  利用我们在上面得到的结论，有：

  $$\omega_{12}(m_1) = \omega_{12}(m_2) = 0$$

  这样，我们刚才推出的新曲率公式就被简化为：

  $$\mathcal{K} = \nabla_{m_2}[\omega_{12}(m_1)] - \nabla_{m_1}[\omega_{12}(m_2)]$$

  对着我们之前得出的 $\nabla_{m_2}\kappa_1$ 的结果再求导，得到：

  $$\nabla_{m_2}\nabla_{m_1}\kappa_1 = [\nabla_{m_2}(\kappa_1 - \kappa_2)]\omega_{12}(m_1) + (\kappa_1 - \kappa_2)\nabla_{m_2}[\omega_{12}(m_1)] = (\kappa_1 - \kappa_2)\nabla_{m_2}[\omega_{12}(m$$

  由于 $\kappa_1 - \kappa_2 > 0$，立刻得到：

  $$\nabla_{m_2}[\omega_{12}(m_1)] \leq 0$$

  以同样的逻辑得到：

  $$\nabla_{m_1}[\omega_{12}(m_2)] \geq 0$$

  代入上面简化过的新曲率公式，就完成了证明。

## 利布曼的刚性球面定理

显然，如果曲面具有常正曲率 $\mathcal{K}$ 的曲面的内蕴几何度量一定与半径为 $\frac{1}{\sqrt{\mathcal{K}}}$ 的球面一致。但是，这个面不一定是球面！图示的两种面都显示了这一点，或者我们也可以尝试将一个乒乓球切一半，然后压一压，也能发现这一点。但是，一个结论是：嵌入 $\mathbb{R}^3$ 的常曲率封闭曲面只能是一个球面，换言之，一个完整的球面是刚性的，它不能被变形成任意的形状。

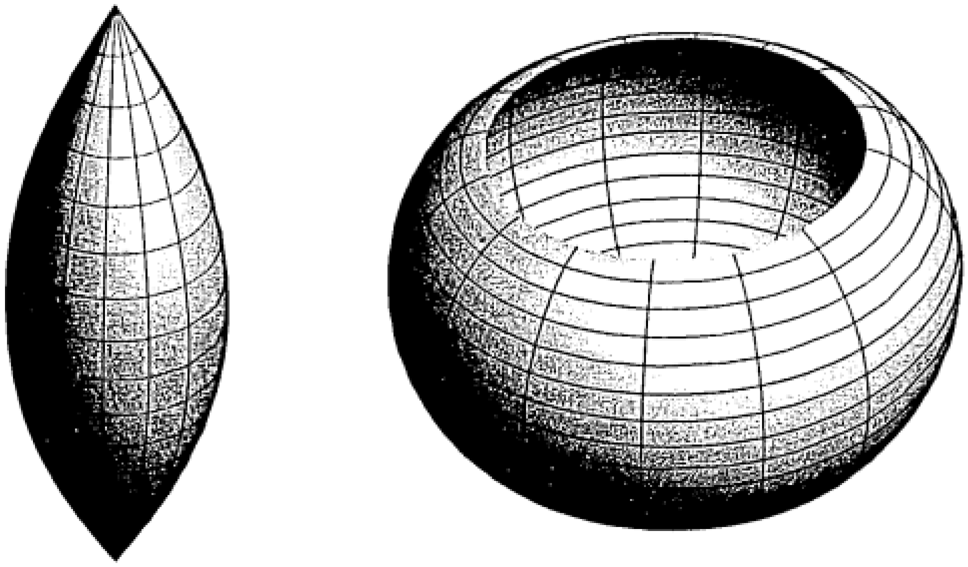

**图 38-7　这是两类具有常正曲率的曲面，它们有与球面相同的内蕴几何，但显然不是球面**

假设我们考虑的封闭曲面是 $\mathcal{S}$，曲率在 $\mathcal{S}$ 上是处处为正的常数，假设 $\kappa_1$ 不是常数，那么它必然在封闭曲面上达到一个最大值，而 $\kappa_2$ 就在这一点处达到最小值，这意味着在这一点上不能有 $\kappa_1 > \kappa_2$，因此我们有 $\kappa_1^{\max} \leq \kappa_2^{\min}$ ，而根据我们的定义，我们默认 $\kappa_1\ ge\kappa_2$。 因此很容易知道我们应当有 $\kappa_1^{\max} = \kappa_1^{\min} = \kappa_2^{\max} = \kappa_2^{\min}$，这意味着在每一点上都有 $\kappa_1 = \kappa_2$，于是这只能是个球面！

## $(\star)n$ 维流形上的曲率 2-形式

刚才，我们所有的研究都发生在平坦的 $\mathbb{R}^3$ 中，我们现在要说明嘉当的第二结构方程就像是“三角形的内角和是 $\pi$”一样，只在平坦空间中成立。而在弯曲的 $n$ 维流形中，空间的弯曲由方程两侧的差值来刻画：

$$[\Omega] = \mathbf{d}[\omega] - [\omega] \wedge [\omega]$$

其中 $[\Omega]$ 称为曲率矩阵，其每个元素都是一个 2-形式：

$$\Omega_{ij} = \mathbf{d}\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$$

我们要说明这些曲率 2-形式含有和黎曼曲率张量相同的信息。我们在这里重复黎曼曲率张量的定义：

$$\mathbf{R}(u, v; w) = \mathcal{R}(u, v)w = \{[\nabla_u, \nabla_v] - \nabla_{[u,v]}\}w$$

我们之前实际上从未推导任何直接计算黎曼曲率张量的公式，而现在，我们将给出：

$$\Omega_{ij} = R_{ijkl}\theta^k \wedge \theta^l$$

要想得到这个式子，我们需要将外微分 $\mathbf{d}$ 的作用范围推广到形式之外，不过在此之前我们先来改写一下之前用过的符号：

$$\nabla_v m_j = \sum_i \omega_{ji}(v) m_i = \sum_i \omega^i_j(v) m_i = \omega^i_j(v) m_i$$

这样的写法使得我们恢复了爱因斯坦求和记号。我们也能再次从中看到 $\omega_{ji}$ 的几何意义（我们将向量 $j$ 向其他三个方向上的变化求和起来）
现在我们推广外导数 $\mathbf{d}$，定义它对标架场 $m_j$ 的作用：

$$\mathbf{d} m_j(v) = \nabla_v m_j = \omega^i_j(v) m_i$$

也就是沿着向量 $j$ 移动时，标架场的一个向量 $m_j$ 变化了多少，它接受一个向量，输出一个向量，可以看作三个 1-形式排列成一个向量。
我们将推广后的记号 $\mathbf{d}$ 应用到一般的向量场 $w = w^j m_j$ 上：

$$\mathbf{d}w = \mathbf{d}[w^j m_j] = [\mathbf{d}w^j] m_j + w^j \mathbf{d} m_j = m_i(\mathbf{d}w^i + \omega^i_j w_j)$$

现在，我们再将 $\mathbf{d}$ 作用一次，我们可以发现，最初的性质 $\mathbf{d}^2 = 0$ 此时不再存在：

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}^2 w &= \mathbf{d} m_k \wedge (\mathbf{d}w^k + \omega^k_j w^j) + m_i(\mathbf{d}^2 w^i + w^j \mathbf{d}\omega^i_j - \omega^i_j \wedge \mathbf{d}w^j) \\
&= \omega^i_k m_i \wedge (\mathbf{d}w^k + \omega^k_i w^i) + m_i(w^j \mathbf{d}\omega^i_j - \omega^i_k \wedge \mathbf{d}w^k) \\
&= m_i(\mathbf{d}\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j) w^j \\
&= m_i \Omega^i_j w^j
\end{aligned}$$

中间的 $\Omega^i_j$ 就是曲率 2-形式。注意我们现在算出的 $\Omega^i_j$ 和之前定义的 $\Omega_{ij}$ 之间差了一个负号，这使得两个结构方程中都有符号变化：

$$[\Omega^i_j] = \mathbf{d}[\omega] + [\omega] \wedge [\omega]$$

以及：

$$\mathbf{d}\theta^i = -\omega^i_j \wedge \theta^j$$

再考虑我们最初对 1-形式的外导数的定义：

$$\mathbf{d}\phi(u, v) = \nabla_u \phi(v) - \nabla_v \phi(u) - \phi([u, v])$$

在上式中，使用 $\mathbf{d}w(v) = \nabla_v w$ 来代替 $\phi$，有：

$$\mathbf{d}^2 w(u, v) = \nabla_u \mathbf{d}w(v) - \nabla_v \mathbf{d}w(u) - \mathbf{d}w([u, v]) = \mathcal{R}(u, v) w$$

通过对比这个式子输出的向量与上面推出的另一个 $\mathbf{d}^2 w$ 输出的向量的各个分量，我们就得到了：

$$-R^i_{jkl}\theta^k \wedge \theta^l = \Omega^i_j = \mathbf{d}\omega^i_j + \omega^i_m \wedge \omega^m_j$$

现在，我们可以推导（广义的）比安基恒等式。考虑对 $\theta^i$ 求二阶外导数，有：

$$\begin{aligned} 0 &= -\mathbf{dd}\theta^i \\ &= \mathbf{d}(\omega^i_j \wedge \theta^j) \\ &= \mathbf{d}\omega^i_j \wedge \theta^j - \omega^i_k \wedge \mathbf{d}\theta^k \\ &= (\mathbf{d}\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j) \wedge \theta^j \\ &= \Omega^i_j \wedge \theta^j \end{aligned}$$

写成更紧凑的形式，我们就得到了：

$$[\Omega] \wedge [\theta] = 0$$

对于另一个恒等式，只需要将 $\mathbf{d}^2$ 作用在联络 1-形式上即可：

$$\begin{aligned} 0 &= -\mathbf{dd}\omega^i_j \\ &= \mathbf{d}(\Omega^i_j - \omega^i_k \wedge \omega^k_j) \\ &= \mathbf{d}\Omega^i_j - \mathbf{d}\omega^i_k \wedge \omega^k_j + \omega^i_k \wedge \mathbf{d}\omega^k_j \\ &= \mathbf{d}\Omega^i_j - \mathbf{d}(\Omega^i_k - \omega^i_m \wedge \omega^m_k) \wedge \omega^k_j + \omega^i_k \wedge (\Omega^k_j - \omega^k_m \wedge \omega^m_j) \\ &= \mathbf{d}\Omega^i_j - \Omega^i_k \wedge \omega^k_j + \omega^i_k \wedge \Omega^k_j \end{aligned}$$

于是我们又得到一个恒等式：

$$\mathbf{d}[\Omega] = [\Omega] \wedge [\omega] - [\omega] \wedge [\Omega]$$

# 施瓦西解的曲率

我们来看看之前的施瓦西度规：

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{1 - \dfrac{2GM}{r}}dr^2 + r^2(d\phi^2 + \sin^2\phi d\theta^2)$$

它是爱因斯坦真空场方程：

$$\mathbf{Ricci}_{ik} = 0$$

的一个解。为了简化数学，我们定义：

$$f(r)=1-\frac{2GM}{r}$$

施瓦西度规可以写成：

$$g=-\theta^t\otimes\theta^t+\theta^r\otimes\theta^r+\theta^\phi\otimes\theta^\phi+\theta^\theta\otimes\theta^\theta$$

其中：

$$\theta^t=\sqrt{f}\mathbf{d}t\quad\theta^r=\frac{1}{\sqrt{f}}\mathbf{d}r\quad\theta^\phi=r\mathbf{d}\phi\quad\theta^\theta=r\sin\phi\mathbf{d}\theta$$

计算嘉当第一结构方程中的各个项，这里其实就是计算各个 1-形式的外导数，我们略去具体计算过程，直接给出结果：

$$\begin{aligned}
&\omega^t_m\wedge\theta^m=\frac{f'}{2\sqrt{f}}\theta^t\wedge\theta^r\\
&\omega^r_m\wedge\theta^m=0\\
&\omega^\phi_m\wedge\theta^m=\frac{\sqrt{f}}{r}\theta^\phi\wedge\theta^r\\
&\omega^\theta_m\wedge\theta^m=\frac{\sqrt{f}}{r}\theta^\theta\wedge\theta^r+\frac{\cot\phi}{r}\theta^\theta\wedge\theta^\phi
\end{aligned}$$

我们可以进一步简化地给出 $[\omega]$ 的各个元素，这里，我们直接采用一种不严谨的取法：

$$\omega^t_r=\frac{f'}{2\sqrt{f}}\theta^t\quad\omega^\phi_r=\frac{\sqrt{f}}{f}\theta^\phi\quad\omega^\theta_r=\frac{\sqrt{f}}{r}\theta^\theta\quad\omega^{\theta_\phi}=\frac{\cot\theta}{r}\theta^\theta$$

接下来计算曲率 2-形式，这个计算也是繁琐而简单的，因此我们直接将结果写在这里。现在我们只有 6 个曲率 2-形式：

$$\Omega^t_r=-\frac{f''}{2}\theta^t\wedge\theta^r\quad\Omega^t_\phi=-\frac{f'}{2r}\theta^t\wedge\theta^\phi\quad\Omega^t_\theta=-\frac{f'}{2r}\theta^t\wedge\theta^\theta$$

$$\Omega^\phi_r=-\frac{f'}{2r}\theta^\phi\wedge\theta^r\quad\Omega^\theta_r=-\frac{f'}{2r}\theta^\theta\wedge\theta^r\quad\Omega^\theta_\phi=\left[\frac{1-f}{r^2}\right]\theta^\theta\wedge\theta^\phi$$

根据 $\Omega^i_j=R^i_{jlk}\theta^k\wedge\theta^l$，我们可以解出黎曼张量的部分分量：

$$R^t_{rrt}=+\frac{2GM}{r^3}\quad R^t_{\phi\phi t}=R^t_{\theta\theta t}=R^\phi_{rr\phi}=R^\theta_{rr\theta}=-\frac{GM}{r^3}\quad R^\theta_{\phi\phi\theta}=\frac{2GM}{r^3}$$

显然，就算里奇张量为 0，黎曼曲率张量也不为 0. 通过计算 $\mathbf{Ricci}_{tt}$ 等四个分量，我们可以验证这个度规确实满足爱因斯坦场方程。
实际上，我们还可以从爱因斯坦场方程直接推出 $f(r)$ 的形式：

$$\mathbf{Ricci}_{\phi\phi} = \mathbf{Ricci}_{\theta\theta} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} = \frac{1-f}{r} \Rightarrow f(r) = 1 - \frac{C}{r}$$

此时：

$$\mathbf{Ricci}_{tt} = \mathbf{Ricci}_{rr} = \frac{f''}{2} + \frac{f'}{r} = 0$$

是自动满足的。

---

**至此，我们的五幕数学正剧就完全结束了**！