Chapter 36：微分形式的微分学

#DifferentialGeometry

1-形式的外导数

我们将函数 f 视作 0-形式，当外导数算子 $\mathbf{d}$ 作用于 f 上时，它就产生了 1-形式 $\mathbf{d}f$，它的意义是 f 在每一个可能的方向上变化得多快：

$$\mathbf{d}f(u) = \nabla_u f$$

因此，我们必须推广外导数 $\mathbf{d}$ 的定义，使之作用在 p -形式 Ψ 上的时候会得到 $(p+1)$ -形式 $\mathbf{d}\Psi$。并且正如 1-形式给出了 f 在某一个方向（输入向量方向）的变化率一样，$p+1$ 形式要给出 Ψ 在 $p+1$ 个方向上的变化率。
我们从最简单的情形开始：如何将外导数算子作用在 1-形式上？外导数一定是某种变化率，为了使得这种变化率有意义，我们首先需要一个 1-形式场 ϕ，同时有一个向量场 (u,v)。现在，我们想知道 ϕ 沿着 u 的变化率，但是我们又不能直接把 ϕ 对着 u 求导（我们根本不知道这是个啥东西！）我们只能退而求其次（事实上，这是我们唯一的选择）——考虑 $\phi(v)$ 沿着 u 的变化率 $\nabla_u\phi(v)$，这个东西至少接受两个向量输出一个数，但是它不是反对称的。我们会尝试将其变成反对称的：$\nabla_u\phi(v) - \nabla_v\phi(u)$。但是现在仍然存在一个问题：$\phi(v)$ 的变化不仅取决于 ϕ 的变化，还取决于 v 的变化。因此，我们必须搞清楚 u,v 对上面的式子产生了什么影响，并且把这些影响完全消除！
考虑一下：

$$\begin{aligned}\nabla_u\phi(v) - \nabla_v\phi(u) &= \nabla_u(\underline{\phi}\cdot v) - \nabla_v(\underline{\phi}\cdot u)\\ &= [v\cdot\nabla_u\underline{\phi} - u\cdot\nabla_v\underline{\phi}] + \phi([u,v])\end{aligned}$$

其中 $[u,v]$ 是之前提到的对易子。在第二项中包含对 u,v 的导数，而第一项中却没有！因此，我们把第二项扔掉，取以下式子来定义外导数作用在 1-形式上的结果：

$$\mathbf{d}\phi(u,v) = \nabla_u\phi(v) - \nabla_v\phi(u) - \phi([u,v])$$

但是这个式子形式复杂、含义模糊。要使得其简洁，我们需要移除其中的向量。我们将在笛卡尔基底下书写上面的公式。此外，我们简单地选择向量场 (u,v) 使得不变的，以使得对易子为 0。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{d}\phi(u,v) &= \nabla_u\phi(v) - \nabla_v\phi(u) \\
&= u^i\partial_i(v^j\phi_j) - v^i\partial_i(u^j\phi_j) \\
&= \partial_i\phi_j[\mathbf{d}x^i(u)\mathbf{d}x^j(v) - \mathbf{d}x^j(u)\mathbf{d}x^i(v)] \\
&= \partial_i\phi_j(\mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j)(u,v)
\end{aligned}
$$

因此，记 $\phi = \phi_i\mathbf{d}x^i$，我们有：

$$
\mathbf{d}\phi = \partial_i\phi_j(\mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j)
$$

由于 $\mathbf{d}f = \partial_i f\mathbf{d}x_i$，我们显然可以得到一个更简洁的形式：

$$
\mathbf{d}(\phi) = \mathbf{d}(\phi_j\mathbf{d}x^i) = \mathbf{d}\phi_j \wedge \mathbf{d}x^j
$$

p -形式的外导数及其莱布尼兹法则

这个结果很容易被推广到 p 形式的外导数上：

$$
\mathbf{d}\Phi = \mathbf{d}(\Phi_{i_1,\cdots,i_p}\mathbf{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{i_p}) = \mathbf{d}\Phi_{i_1,\cdots,i_p} \wedge \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}x^{i_p}
$$

接下来我们看一下外导数运算的莱布尼兹法则。不难验证，假如 Ψ 是一个微分形式，f 是个函数，那么有：

$$
\mathbf{d}(f\Psi) = (\mathbf{d}f) \wedge \Psi + f\mathbf{d}\Psi
$$

但是对于 Φ 是 $\deg\Phi$ 形式的时候，莱布尼兹法则的推广不是那么明显：

$$
\mathbf{d}(\Phi \wedge \Psi) = (\mathbf{d}\Phi) \wedge \Psi + (-1)^{\deg\Phi}\Phi \wedge (\mathbf{d}\Psi)
$$

我们证明一个简单的情况，之后将其推广：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{d}(\phi \wedge \Psi) &= \mathbf{d}([\phi\mathbf{d}x^i] \wedge [\Psi_{jk}\mathbf{d}x^j \wedge \mathbf{d}x^k]) \\
&= (\Psi_{jk}\mathbf{d}\phi_i + \phi_i\mathbf{d}\Psi_{jk}) \wedge \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j \wedge \mathbf{d}x^k \\
&= (\mathbf{d}\phi) \wedge \Psi + (\phi_i\mathbf{d}\Psi_{jk}) \wedge \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j \wedge \mathbf{d}x^k \\
&= (\mathbf{d}\phi) \wedge \Psi - (\phi_i \wedge \mathbf{d}x^i) \wedge \mathbf{d}\Psi_{jk} \wedge \mathbf{d}x^j \wedge \mathbf{d}x^k \\
&= (\mathbf{d}\phi) \wedge \Psi - \phi \wedge (\mathbf{d}\Psi)
\end{aligned}
$$

注意这里面 $\mathbf{d}\Psi_{jk}$ 的移动，我们要将其移动到所有与 Φ 有关的部分之后，这就是那个神秘的指数出现的原因。

闭形式和恰当形式

我们现在考虑让 $\mathbf{d}$ 算子两次作用在同一个微分形式上，我们就来算最简单的一个：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{d}^2\phi &= \mathbf{d}[\partial_i\phi_j(\mathbf{d}x^i\wedge\mathbf{d}x^j)] \\
&= \mathbf{d}[\partial_i\phi_j]\wedge\mathbf{d}x^i\wedge\mathbf{d}x^j \\
&= [\partial_k\partial_i\phi_j]\mathbf{d}x^k\wedge\mathbf{d}x^i\wedge\mathbf{d}x^j \\
&= 0
\end{aligned}
$$

在推导过程中，我们默认了交换偏导数的顺序不会影响结果。使用类似的计算，以上结果可以被推广至 p -形式：外导数算子作用两次的结果都为 0：

$$\mathbf{d}^2 = 0$$

如果一个形式的外导数为 0，我们称这个形式是闭的：

$$\mathbf{d}\Upsilon = 0$$

如果某个 p -形式是某个 $p-1$ 形式的外导数，那么我们称这个 p -形式是恰当的：

$$\exists\Psi, \mathbf{d}\Psi = \Upsilon$$

若 Υ 是恰当的，那么我们将 Ψ 称为 Υ 的位势。Ψ 不是唯一的，因为假如我们取任意 $p-2$ 形式 Θ，我们都有：

$$\Psi \to \tilde{\Psi} = \Psi + \mathbf{d}\Theta \quad \Upsilon = \mathbf{d}\tilde{\Psi}$$

显然，恰当的形式都是闭的，那么闭形式是否都是恰当的？这需要庞加莱引理：若在一个单连通区域内有 $d\Upsilon = 0$，则存在 Ψ，使得 $\mathbf{d}\Psi = 0$。这里有一些关于某个形式是否是闭的的小结论：

- 若 Υ 和 Φ 是闭的，那么 $\Upsilon \wedge \Phi$ 也是闭的
- 如果 Υ 是闭的，那么对任意 Φ，$\Upsilon \wedge \Phi$ 都是闭的
- 如果 $\deg\Phi$ 是偶数，那么 $\Phi \wedge \mathbf{d}\Phi$ 是闭的

在复分析中，我们说一个函数是解析的，其直观意义是该函数是对复数的一个局部伸缩、扭转。函数 $f(z) = u + iv$ 解析的条件是：

$$i\partial_x f = \partial_y f$$

写成分量形式就是所谓柯西-黎曼方程：

$$\partial_x u = \partial_y v \quad \partial_x v = -\partial_y u$$

我们可以使用形式的语言重写这个方程。考虑如下 1-形式：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{d}(f\mathbf{d}z) &= \mathbf{d}f \wedge \mathbf{d}z \\
&= (\partial_x f \mathbf{d}x + \partial_y f \mathbf{d}y) \wedge (\mathbf{d}x + i\mathbf{d}y) \\
&= (i\partial_x f - \partial_y f)\mathcal{A}
\end{aligned}
$$

其中 $\mathcal{A} = \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y$ 是面积 2-形式。因此，若 $f(z)$ 解析，则 $f\mathbf{d}z$ 是闭的，也就是说 $\mathbf{d}(f\mathbf{d}z) = 0$。

用形式做向量运算

我们现在只考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的微分形式，因为只有在这里，一个 2-形式才"伪装"成一个向量，两个 1-形式的楔积才"伪装"成两个向量的叉乘。
我们写出上面 1-形式的外导数的分量：

$$
\mathbf{d}\phi = \partial_i \phi_i (\mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j) \Rightarrow \begin{bmatrix} \partial_2\phi_3 - \partial_3\phi_2 \\ \partial_3\phi_1 - \partial_1\phi_3 \\ \partial_1\phi_2 - \partial_2\phi_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla \times \underline{\phi} = \mathrm{curl}\underline{\phi} = \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}
$$

因此，如果 $\mathbf{d}\phi = 0$，或者说 ϕ 是闭的，就意味着向量场 $\underline{\phi}$ 旋度为 0. 此时，我们可以将闭形式 ϕ 描绘成保守场对应的向量，它的意义就是保守场沿路径做功。

接下来，我们还可以看看 2-形式的外导数：

$$
\mathbf{d}\Psi = (\partial_1\Psi^1 + \partial_2\Psi^2 + \partial_3\Psi^3)(\mathbf{d}x^1 \wedge \mathbf{d}x^2 \wedge \mathbf{d}x^3) = \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Psi^1 \\ \Psi^2 \\ \Psi^3 \end{bmatrix} \mathcal{V}
$$

那么我们就制造出了散度（3-形式的分量）：

$$
\mathbf{d}\Psi = (\mathrm{div}\underline{\Psi})\mathcal{V} = (\nabla \cdot \underline{\Psi})\mathcal{V}
$$

从外微分的基本恒等式：

$$
\mathbf{d}^2 = 0
$$

我们也可以拿到很多有趣的结论：将其作用在 0-形式（函数）f 上，得到：梯度无旋：

$$
\nabla \times \nabla f = 0
$$

将其作用在某个 10 形式上，得到：旋度无源：

$$
\nabla \cdot (\nabla \times \underline{\phi}) = 0
$$

我们还可以使用这套语言推导许多矢量分析中的基本结论。考虑到一个基本的小结论:

$$\phi \wedge \Psi = (\underline{\phi} \cdot \underline{\Psi})\mathcal{V}$$

我们可以推出:

$$(\nabla \cdot [f\underline{\Psi}])\mathcal{V} = \mathbf{d}[f\Psi] = (\mathbf{d}f) \wedge \Psi + f\mathbf{d}\Psi = [(\nabla f) \cdot \underline{\Psi} + f\nabla \cdot \underline{\Psi}]\mathcal{V}$$

其他恒等式可以使用类似方式推出。

高度统一的简洁美：麦克斯韦方程

最后，我们宣称我们要像电动力学中一样，将麦克斯韦方程统一成一个方程。我们先从两个无源方程开始。我们使用如下的外导数记号将时间部分和空间部分分离:

$$\mathbf{d}f = \mathbf{d}_S f + \mathbf{d}_t f$$

考虑我们之前构造的法拉第电磁 2-形式：

$$F = \epsilon \wedge \mathbf{d}t + B$$

我们现在要求出它的外导数。一项一项地求（我们用 $\mathcal{Q}$ 表示通量 2-形式）：

$$\begin{aligned}\mathbf{d}(\epsilon \wedge \mathbf{d}t) &= \mathbf{d}_S(\epsilon) \wedge \mathbf{d}t \\ &= (\nabla \times \underline{E})\mathcal{Q} \wedge \mathbf{d}t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{d}B &= \mathbf{d}_S B + \mathbf{d}_t B \\ &= \mathbf{d}_S B + \mathbf{d}t \wedge [\partial_t B_x(\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z) + \cdots] \\ &= (\nabla \cdot \underline{B})\mathcal{V} + \mathbf{d}t \wedge \partial_t B\end{aligned}$$

因此我们有:

$$\mathbf{d}F = (\nabla \cdot \underline{B})\mathcal{V} + [(\nabla \cdot \underline{E} + \partial_t \underline{B})\mathcal{Q}] \wedge \mathbf{d}t = 0$$

也就是说法拉第 2-形式是闭的。换言之，存在一个 1-形式的位势 A 使得:

$$F = \mathbf{d}A$$

在处理另外两个方程之前，我们保修引入一个四维时空中的 1-形式:

$$J = -\rho\mathbf{d}t + j$$

由于我们并没有引入霍奇对偶，因此我们不加证明地给出，对于另外两个方程，我们将得到:

$$\mathbf{d} \star F = 4\pi \star J$$

因此微分形式可以大大简化麦克斯韦方程组的表达！