Chapter 34：2-形式

#DifferentialGeometry

我们现在引入 2-形式。2-形式是一个 $(0,2)$ 阶的反对称张量：

$$\Psi(v,u)=-\Psi(u,v)$$

自然地，p 形式是一个 $(0,p)$ 阶的反对称张量，交换任意的两个输入向量的位置都会使得其正负号发生改变。我们的目标是逐渐增加 p，使得我们逐渐了解微分形式的本质。幸运的是，在 $p=3$ 时，我们几乎就可以揭示微分形式的全部性质了。

一个典型的例子是面积 2-形式。我们定义 $\mathcal{A}(u,v)$ 是以 u,v 为边的平行四边形的有向面积，很容易证明它是一个张量，几何证明如下图：

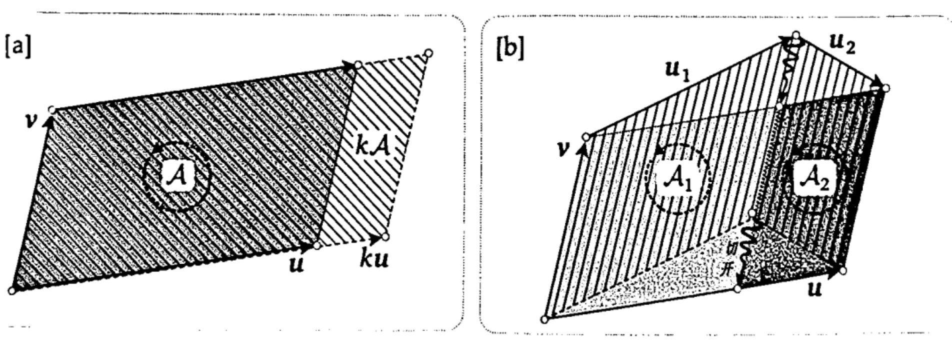

图 34-1 有向面积是一个 2-形式的几何证明. [a] 将边长乘以 k，则面积也乘以 k：$\mathcal{A}(k\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=k\mathcal{A}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$. [b] 沿 $\boldsymbol{v}$ 的方向将原来的面积切成两块 $\mathcal{A}_1=\mathcal{A}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{v})$ 和 $\mathcal{A}_2=\mathcal{A}(\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{v})$，则面积不变，即 $\mathcal{A}=\mathcal{A}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2$

楔积

我们之前说过，任意 $(0,2)$ 阶张量可以分解为一个对称张量和一个反对称张量之和。那么我们有：

$$\phi\otimes\psi=\frac{1}{2}[\phi\otimes\psi+\psi\otimes\phi]+\frac{1}{2}[\phi\otimes\psi-\psi\otimes\phi]$$

第二部分这个反对称张量就算通过两个 10 形式产生 2-形式，它被称为楔积：

$$\phi\wedge\psi=\phi\otimes\psi-\psi\otimes\phi$$

容易注意到楔积本身有反对称性：

$$\phi \wedge \psi = -(\psi \wedge \phi)$$

以及服从加法分配律：

$$\phi \wedge (\psi + \sigma) = \phi \wedge \psi + \phi \wedge \sigma$$

通过取任意 u, v 进行分量计算， 很容易证明，面积 2-形式是 1-形式笛卡尔基的楔积：

$$\mathcal{A} = dx \wedge dy$$

我们接下来说一下楔积的几何意义：

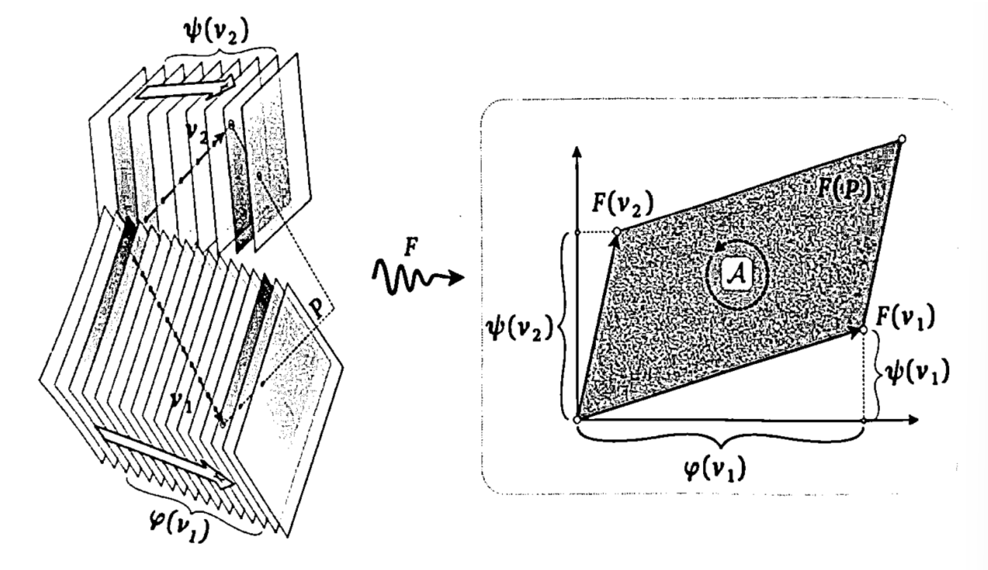

图 34-2 楔积的几何意义. P 是在 $\mathbb{R}^3$ 中以 v_1 和 v_2 为边的平行四边形，$\varphi(v_k)$ 和 $\psi(v_k)$ 是 v_k 穿过的平面数量. 映射 F 将数对 $(\varphi(v_k), \psi(v_k))$ 融合到 $\mathbb{R}^2$ 中的直角坐标系中，将 P 映射到平行四边形 $F(P)$，则 $(\varphi \wedge \psi)(v_1, v_2)$ 是 $F(P)$ 的定向面积 $\mathcal{A}$

之前我们已经提过，1-形式可以被可视化为一个平面族，那么我们现在有两个 1-形式，我们可以构建一个从 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的映射：

$$v \mapsto F(v) = \begin{bmatrix} \phi(v) \\ \psi(v) \end{bmatrix}$$

将楔积 $\phi \wedge \psi$ 应用于 $\mathbb{R}^n$ 内的任意平行四边形时，它输出的实数代表着 $F(v_1), F(v_2)$ 形成的平行四边形的有向面积。证明很简单：

$$\begin{aligned} (\phi \wedge \psi) &= \phi(v_1)\psi(v_2) - \psi(v_1)\phi(v_2) \\ &= \det \begin{bmatrix} \phi(v_1 & \phi(v_2) \\ \psi(v_1) & \psi(v_2) \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{A}[F(v_1), F(v_2)] \end{aligned}$$

除了直角坐标之外，我们也可以推导极坐标中的 2-形式。我们可以通过直接的计算来完成这个推导 （这个过程中，需要使用外导数的莱布尼兹法则来一步步展开式子）：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y &= \mathbf{d}(r\cos\theta) \wedge \mathbf{d}(r\sin\theta) \\
&= [(\mathbf{d}r)\cos\theta - r\sin\theta\mathbf{d}\theta] \wedge [(\mathbf{d}r)\sin\theta + r\cos\theta\mathbf{d}\theta] \\
&= \cos^2\theta r\mathbf{d}r \wedge \mathbf{d}\theta - \sin^2\theta r\mathbf{d}\theta \wedge \mathbf{d}r \\
&= r\mathbf{d}r \wedge \mathbf{d}\theta
\end{aligned}
$$

基底 2-形式和投影

与 1-形式一样，所有 2-形式自然构成向量空间，因此我们可以寻找这个向量空间的基底。我们要说明：所有 $\mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^j$，其中 $i < j$ 的 2-形式集合是所有 2-形式的一个基底。

显然，根据基底的数量我们可以知道：$\mathbb{R}^n$ 中所有 2-形式的集合是 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 维的向量空间。

例如，对于二维空间，如果 Ψ 是一般的二维张量，那么它的展开有四项，但是如果它是一个 2-形式，那么它只有一项：

$$
\Psi = \Psi_{12}(\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y) = \Psi_{12}\mathcal{A}
$$

在三维空间中也是类似的。现在我们看一下这些基底的几何意义：设 P 是 $\mathbb{R}^3$ 中的平行四边形，$\mathcal{A}_z$ 是 P 在 (x, y) 面上的正交投影，则 $\mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y$ 作用于 P 的结果是 $\mathcal{A}_z$ 的有

向面积。

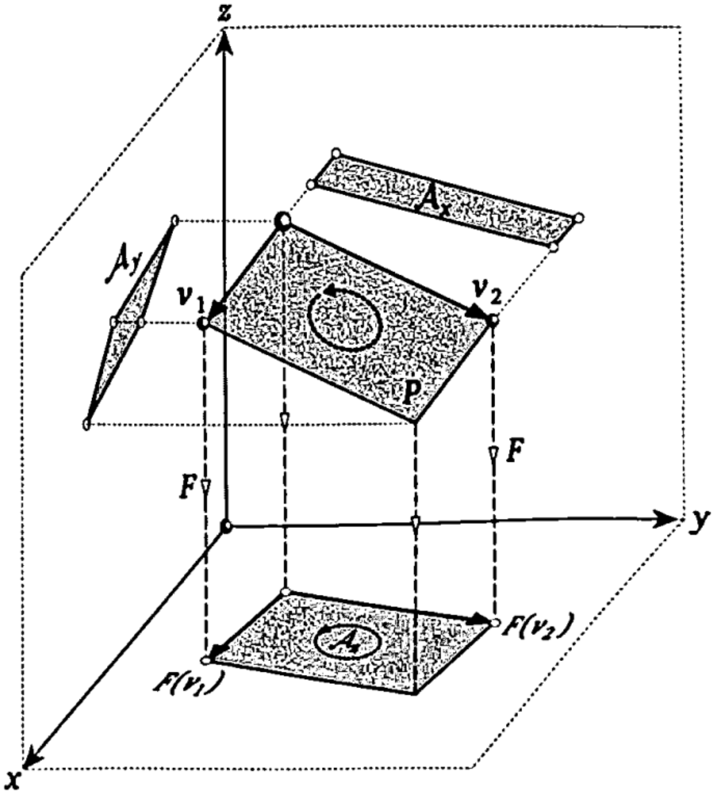

图 34-4　2-形式基的几何意义．每个 2-形式基产生 P 在相关坐标平面上投影的面积．例如，$(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)(v_1,v_2)=A_z$，是 P 沿 z 方向在 (x,y) 平面上投影的面积

2-形式与 $\mathbb{R}^3$ 中向量的联系：流量

为什么我们在大一学习数学分析时（或大二学习电动力学时），学到的矢量微积分（场论初步）只能在三维空间中运算？一个观察是：只有在三维空间中，2-形式的分量与向量的数量是相同的！

我们将三维空间中的 2-形式展开：

$$\Psi=\Psi^1(\mathbf{d}x^2\wedge\mathbf{d}x^3)+\Psi^2(\mathbf{d}x^3\wedge\mathbf{d}x^1)+\Psi^3(\mathbf{d}x^1\wedge\mathbf{d}x^2)$$

我们可以将三个分量写在一起：

$$\underline{\Psi}=\begin{bmatrix}\Psi^1\\ \Psi^2\\ \Psi^3\end{bmatrix}$$

但是注意，$\underline{\Psi}$ 中只是 2-形式的三个分量，它只是"伪装"成了一个矢量的样子！为了看看为什么三维空间中的 2-形式会与一个矢量关联起来，我们现在引入通量的概念。设有一种流体是以 $\underline{\Psi}$ 的速度流过全空间，而 v_1, v_2 两个矢量生成平行四边形 P，通量是单位时间内穿过这个面的流体的体积。容易证明 $\Psi(v_1, v_2)$ 正是通过 P 的通量：我们记通过 P 的通量是 $\Phi(v_1, v_2)$。如果我们构造沿着 z 轴的流场 $\underline{\Psi} = \Psi^3 e_3$，那么穿过 $\mathcal{A}_3$ 的流量显然是 $\Psi^3 \mathcal{A}_3$，同时有相等的流量穿过 P。重复以上过程，我们就得到了：

$$\Phi(v_1) = \Psi^1 \mathcal{A}_! + \Psi^2 \mathcal{A}_2 + \Psi^3 \mathcal{A}_3 = \Psi(v_1, v_2)$$

在可视化上，如果我们绘制单位时间内流过 P 的流体，那么会得到一个平行六面体，而通量就是这个六面体的体积。

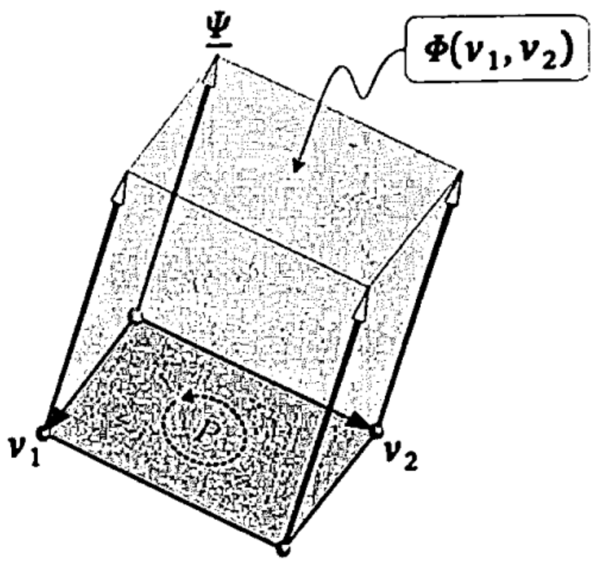

图 34-5 $\underline{\Psi}$ 通过 P 的流量（通量）= 体积 $\Phi(v_1, v_2)$

$\mathbb{R}^3$ 中向量积和楔积的关系

我们现在将 1-形式与向量联系起来。对于 1-形式：

$$\phi = \phi_1 \mathbf{d}x^1 + \phi_2 \mathbf{d}x^2 + \phi_3 \mathbf{d}x^3$$

我们将对应的向量表示为 $\underline{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}$，我们现在要说明向量的叉乘（矢量积）是三维空间特有的：给定 $\underline{\phi}$ 和 $\underline{\theta}$，二者夹角 θ，我们定义 $\underline{\phi}$ 和 $\underline{\theta}$ 的向量积指向垂直于两个因子的方向，并且服从右手定则，长度则是两个因子张成的平行四边形的面积，我们要证

明它实际上对应于 1-形式的楔积。
为了说明这一点，我们定义一个 2-形式 $\Psi = \phi \wedge \sigma$，那么我们要证明 $\underline{\Psi} = \underline{\phi} \times \underline{\sigma}$。我们记 $n = \underline{\phi} \times \underline{\sigma}$，那么计算楔积：

$$\Psi(n, \cdots) = \phi(n)\sigma(\cdots) - \sigma(n)\phi(\cdots) = 0$$

因此 $\underline{\Psi}$ 与 n 有相同的方向。考虑下面这个通量 2-形式：

$$\begin{aligned}\Psi(\underline{\phi}, \underline{\sigma}) &= (\phi \wedge \sigma)(\underline{\phi}, \underline{\sigma}) \\ &= \phi(\underline{\phi})\sigma(\underline{\sigma}) - \sigma(\underline{\phi})\phi(\underline{\sigma}) \\ &= [\mathcal{A}(\underline{\phi}, \underline{\sigma})]^2\end{aligned}$$

因此我们证明了 $\underline{\Phi} = \underline{\phi} \times \underline{\sigma}$，也就把 1-形式的楔积与向量叉积联系在了一起。

这样，我们可以从楔积的基本公式推出向量的叉积表达式：

法拉第的电磁 2-形式和麦克斯韦的电磁 2·-形式

在经典电动力学里，我们有两个三维的矢量场 $\underline{E}, \underline{B}$，我们将与之相关的 1-形式记为 ϵ, β；与之相关的 2-形式记为 E, B。我们可以构造所谓法拉第 2-形式：

$$F = \epsilon \wedge dt + B$$

我们将粒子 4-速度向量记为 u，粒子的动量记作 π，固有时记作 τ，那么作用于粒子上的电磁力：

$$\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}\tau} = qF(\cdots, u)$$

这是个 1-形式，代表电磁力沿着输入向量方向的大小。特别地，我们将洛伦兹力写为：

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = q(\underline{E} + v \times \underline{B})$$

我们声称 $\star F$ 是 F 的霍奇对偶（当然，我们没有定义它），我们将其称为麦克斯韦 2-形式，它被写为：

$$\star F = \beta \wedge dt - E$$

使用它可以简化麦克斯韦方程组，我们将在后续推导。