Chapter 33：张量

#DifferentialGeometry

张量的定义

我们首先对张量下一个完整的定义：在点 p 处的 (f, v) 阶张量将 v 个矢量和 f 个对偶矢量映射到一个实数的多重线性映射。

因此，容易发现在这个定义下，一个 1-形式是一个 $(0,1)$ 阶的张量，而一个向量是一个 $(1,0)$ 阶的张量。因此，一个张量可以写为：

$$H(\phi_1, \cdots, \phi_f || v_1, \cdots, v_f)$$

最初我们定义的黎曼张量是：

$$\delta w = \mathbf{R}(u, v; w) = \{[\nabla_u - \nabla_v] - \nabla_{[u,v]}\}w$$

但是它输出的是一个向量（和乐性），因此如果想要让它变成张量，它必须和一个 1-形式缩并！因此最终我们的黎曼张量有四个下标，而且直观上看起来的效果就像是我们把 δw 投影到了一些基底上。
显然，张量的一个典型例子（表示）是线性代数中介绍的矩阵，但是它们只是 $(1,1)$ 阶张量。不妨设某个 $(1,1)$ 阶张量有以下分量：

$$L = L^i_j = L(dx^i || e_j)$$

如果我们将向量基用列向量表示，对偶基用行向量表示，那么这个张量显然应该用矩阵表示，矩阵的 (i,j) 元素就算 L^i_j。矩阵左乘列向量表示的就是线性变换：$v^i = L^i_j v^j$
。

张量的运算和基底

我们现在考虑如何用旧的张量生成新的张量。首先，张量可以相加，但是将两个阶数不同的张量相加是没有意义的。对于同阶张量相加的情况，加法的定义显而易见，此处不再赘述。
张量的乘法，即所谓张量积，是会导致张量升阶的。一个 (f_1, v_1) 阶的张量与一个

(f_2, v_2) 阶的张量相加，可以得到 $(f_1 + f_2, v_1 + v_2)$ 阶的张量。我们举个例子说明怎么加：

$$(J \otimes T)(\phi, \psi || u, v, w) = J(\phi, \psi || u) \cdot T(v, w)$$

设 $\{e_i\}$ 是线性空间中的标准正交基，而 $\{dx^j\}$ 是 1-形式的对偶笛卡尔基，我们可以将这些东西填入张量来获得张量的分量。一个 $(0, 2)$ 阶的张量的分量是：

$$T_{ij} = T(e_i, e_j)$$

我们可以将整个张量分解为其分量：

$$\begin{aligned} T(v, w) &= T(v^i e_i, w^j e_j) \\ &= T(e_i, e_j) v^i w^j \\ &= T_{ij} v^i w^j \\ &= T_{ij} [\mathbf{d}x^i(v)][\mathbf{d}x^j(w)] \\ &= T_{ij} (\mathbf{d}x^i \otimes dx^j)(v, w) \end{aligned}$$

因此，我们将这个 $(0, 2)$ 阶张量表示为：

$$T = T_{ij}(dx^i \otimes dx^j)$$

我们称 T_{ij} 是张量的分量，那么 $(dx^i \otimes dx^j)$ 称为这个张量的基底（正如 1-形式的分量和基底一样）。同理，一个 $(2, 0)$ 阶的向量可以写为：

$$K = K^{ij}(e_i \otimes e_j)$$

对于任意 (f, v) 阶张量，它的分量显然可以写为：

$$T = T^{j_1, \cdots j_f}_{i_1, \cdots, i_v}(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_f}) \otimes (dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_v})$$

如果我们将两个 1-形式张量积起来，得到一个 $(0, 2)$ 阶张量：

$$(\phi \otimes \psi)(v, w) = \phi(v)\psi(w)$$

我们可以将这和向量再分解回去：

$$\phi \otimes \psi = \phi_i \psi_j (dx^i \otimes dx^j)$$

但是注意对于大部分的一般情况，T 并不能这样分解。

度规张量与经典线元的关系

考虑曲面上某一点坐标的无穷小变化 $du.dv$，曲面内存在一个无穷小线元 ds，高斯最初将其记为：

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

令 $x^1 = u, x^2 = v$，$g_{11} = E, g_{12} = g_{21} = F, g_{22} = G$，那么度规张量表示为：

$$g = g_{ij}(dx^i \otimes dx^j)$$

张量缩并

我们先考虑 1-形式与一个向量的缩并：

$$\phi(v) = (\phi_i dx^i)(v^j e_j) = (\phi_i v^j) dx^i(e_j) = (\phi_i v^j)\delta^i_j = \phi_j v^j$$

这里，我们将一个逆变矢量（上标）和一个协变矢量（下标）缩并到了一个实数，而且这个运算与我们选择的基底是无关的。我们这里所说的张量缩并也会缩掉一个上标和一个下标，例如缩并黎曼张量得到里奇张量：$\mathbf{R}^m_{mij} = \mathbf{Riccci}_{ij}$。缩并会改变张量的阶，一般是将张量变成 $(f-1, v-1)$ 阶，缩并的结果与生成求和的向量基 $\{e_j\}$、1-形式基 $\{dx^i\}$ 无关。我们具体看一个例子：考虑 $A^{ij}B_{jk} = C^i_k$，C^i_k 是一个新张量的分量，使得：

$$C(\phi||v) = C^i_k \phi_i v^k$$

注意到：

$$\begin{aligned}
C^i_k \phi_i v^k &= A^{ij} B_{jk} \phi_i v^k \\
&= [\phi_i A(\mathbf{d}x^i, \mathbf{d}x^j)][B(e_j, e_k)v^k] \\
&= A(\phi_i dx^i, dx^j) B(e_j, v^k e_k) \\
&= A(\phi, \mathbf{d}x^j) B(e_j, v) \\
&= A(\phi, B(e_j, v) dx^j)
\end{aligned}$$

这样我们就得到了缩并后的张量，验证一下。最后的结果确实是一个数。这个张量接受 ϕ 和 v，因此是一个 $(1,1)$ 阶张量。

用度规张量升降指标

度规张量 g_{ij} 为我们提供了流形的一切内蕴集合信息，它是一个 $(0,2)$ 阶张量，我们可以利用它，将一个向量变成一个 1-形式：

$$(\text{vector})n \to (\text{1-form})v \ : \ v(w) = g(w, n)$$

说一下符号的问题：在之前，我们总是用希腊字母表示 1-形式，而用英语字母表示一般的向量。现在我们将打破这个规定：如果我们使用下标，证明这是一个协变矢量（1-形式），否则，就是一个逆变矢量（一般的矢量）。我们将 1-形式对应于向量 n 的分量表为 $\mathbf{n}_i$，按照这个约定：

$$\boldsymbol{v} = n_i \mathbf{d}\boldsymbol{x}^i$$

于是：

$$n_i = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_i, n^j \boldsymbol{e}_j) = g(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) n^j \Rightarrow n_i = g_{ij} n^j$$

利用度规可以改变任意一个张量的阶。先说一下符号：根据爱因斯坦求和规定，上下指标才能对着消，因此如果一个张量要接受协变矢量，它会有上标（换言之，它是由逆变基底张量积起来的）；如果要接受逆变矢量，它会有下标（换言之，它是由协变基底张量积起来的）。我们现在演示如何把 $(1,3)$ 阶黎曼张量转到 $(0,4)$ 阶，也就是说，我们要将 R^m_{ijk} 变成 R_{ijkl}：

$$R_{ijkl} u^i v^j w^k n^l = R^m_{ijk} u^i v^j w^k n_m = R^m_{ijk} u^i v^j w^k (g_{ml} n^l)$$

因此：

$$R_{ijkl} = R^m_{ijk} g_{ml}$$

因此，我们缩并了一对指标 m，就像将指标 m 下降成了指标 l 一样。这个过程称为指标下降。这个过程的物理意义是：我先将一个逆变矢量 n^l 用度规张量变成协变矢量 $g_{ml} n^l$，再将其作为原来黎曼张量的一个输入。

我们也可以升指标：这需要一个类似于度量张量的东西 $\tilde{g}$，它是一个 $(2,0)$ 型的张量，那么我们有：

$$n^i = \tilde{g}^{ik} n_k$$

可以升指标：

$$R_{ijkl} \tilde{g}^{km} = R^m_{ijl}$$

注意到将向量 n 先降指标，再升指标，应该得到自身，那么我们立刻得到：

$$\tilde{g}^{ik} g_{kj} = \delta^i_j$$

在传统的做法中，我们直接将 $\tilde{g}$ 记作 g，尽管它们的分量其实不一样！

对称和反对称张量

对于 $(0,2)$ 阶张量，我们定义对称和反对称张量：

$$E^{+}(w,v) = +E^{+}(v,w) \quad E^{-}(w,v) = -E^{-}(w,v)$$

我们发现总能将一个 $(0,2)$ 阶张量分解为一个对称张量和一个反对称张量之和，我们使用圆括号和方括号标记对称化和反对称化：

$$E_{(ij)} = \frac{1}{2}[E_{ij} + E_{ji}] \quad E_{[ij]} = \frac{1}{2}[E_{ij} - E_{ji}]$$