Chapter 32：1-形式

#DifferentialGeometry

在这一章中，我们要开始使用严格的数学语言介绍一种强大的计算方法——微分形式的外微积分，简称为微分形式。

1-形式的定义和例子

用自然语言来讲，1-形式是输入一个向量的线性实值函数，这里的"1-"代表这个函数接受一个向量作为输入，因此（我们后面会看到）它是一种特别简单的张量。也有人将 1-形式称为协变矢量。更确切地说，如果 ω 是一个 1-形式，那么它满足：

$$\omega(k_1v_1 + k_2v_2) = k_1\omega(v_1) + k_2\omega(v_2)$$

1-形式需要用它对向量的作用来定义，我们称两个 1-形式相等，当且仅当它们对所有向量的作用都相同。我们也可以通过 1-形式对向量的作用定义它们的加法：

$$(\omega + \phi)(v) = \omega(v) + \phi(v)$$

以及 1-形式的数乘：

$$(k\omega)(v) = k(\omega(v))$$

因此，我们发现 1-形式的集合对于其加法和数乘运算也是封闭的，因此 1-形式也就构成了向量空间。我们称这个向量空间是原始向量空间的对偶空间。我们可以认为向量空间与 1-形式空间也是对偶的，我们将向量 v 看作用一个作用于 1-形式 ω 的函数：

$$v(\omega) = \omega(v)$$

向量 v 和 1-形式 ω 的相互作用可以表示为 $\langle\omega, v\rangle$，有时称为向量和 1-形式的缩并。由此我们可以得到向量也是一个接受 1-形式的线性函数：

$$v(\omega + \phi) = v(\omega) + v(\phi)$$

以及

$$v(k\omega) = k\omega(v) = kv(\omega)$$

我们用 T_p 表示 p 处向量组成的空间，自然也可以定义出 p 处的 1-形式构成的空间。在每个点 p 处定义一个向量 v_p，我们就得到了向量场；在每个点 p 处定义一个 1-形式 ω_p，我们就得到了 1-形式场！

1-形式有很多例子：在重力场中，当沿着向量 v 移动重物时，令 $\omega(v)$ 代表克服重力做的功，它就是一个 1-形式。下图中我们展示了这种 1-形式的可视化——我们将其展示为平面的堆积：

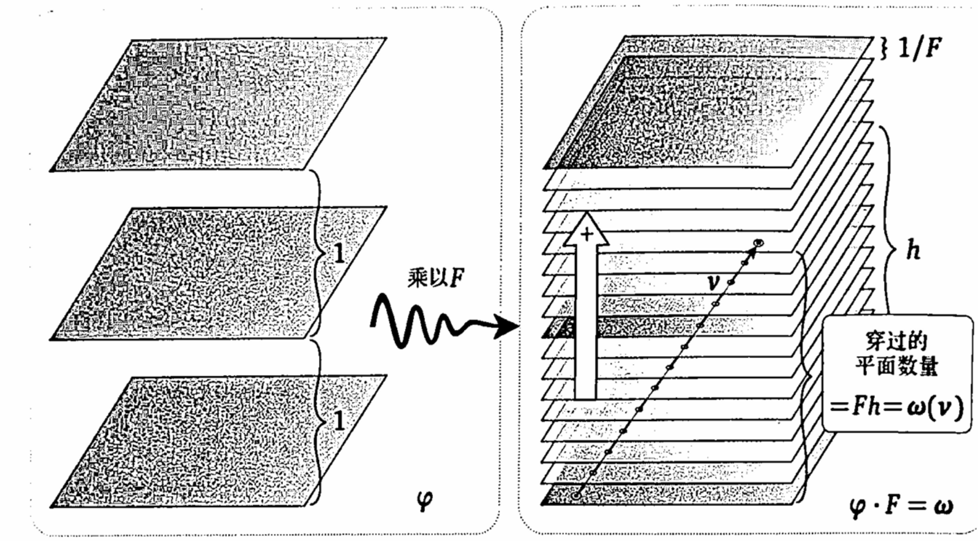

图 32-3　1-形式的可视化. 右图是一摞平面，它们表示引力功的 1-形式 ω，其间距为 $1/F$，方向向上. 因此 $\omega(v)$ 可以表示为 v 所穿过的（带符号的）平面数量. 左图是单位间距 1-形式的 φ. 当它乘以 F 时，其平面的密度增加 F 倍，它们的间距缩小到 $1/F$，产生 $\varphi\cdot F=\omega$

这种可视化的方法适用于任意 1-形式：在点 p 处，代表 1-形式的曲面 $\mathcal{S}$ 的切向量满足 $\omega(v_p)=0$，这被称为 ω 的核。在 n 维空间中，ω 的核是 $n-1$ 维的。

接下来我们看看等高线地形图：

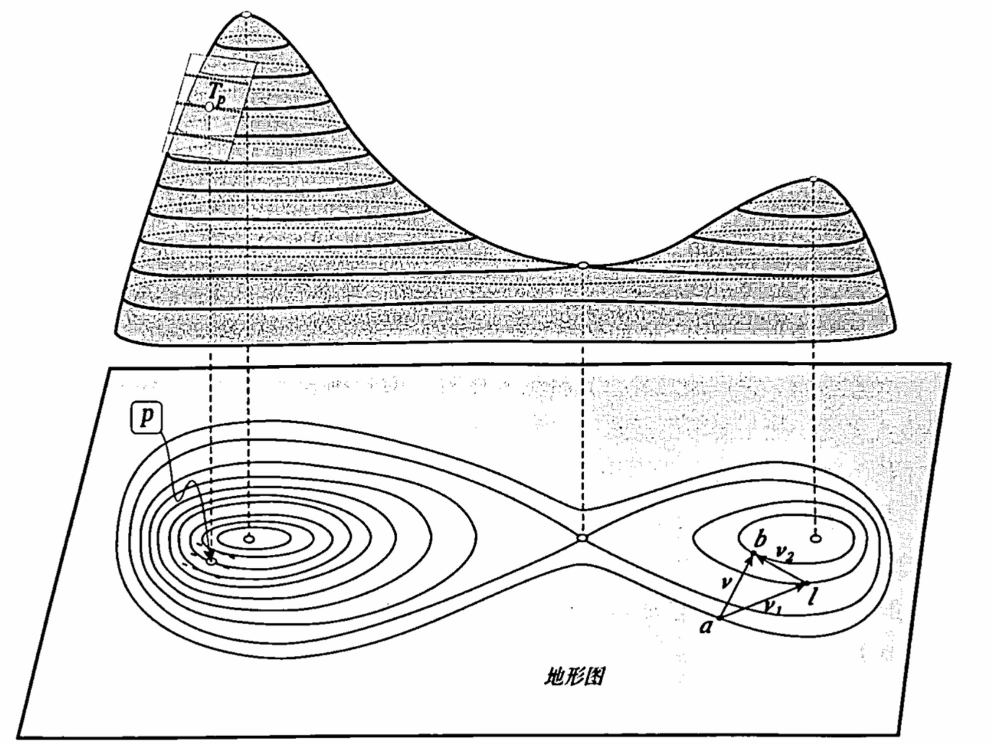

图 32-4　梯度 1-形式与地形图． 当我们不断放大曲面地形图中点 p 周围的小区域时，等高线看起来越来越直，间距越来越均匀．最终，它们成了地形图上点 p 的切平面 T_p 的代表，后者的地形图是对梯度 1-形式 ζ 的描绘

我们设 v 是从 a 点出发到 b 点的向量，定义 $\eta(v)$ 是穿过的等高线的数目和等高线高度差 δh 的乘积，容易发现 $\eta(v)$ 满足 $\eta(v_1)+\eta(v_2)=\eta(v_1+v_2)$，但是不满足 $\eta(kv)=k\eta(v)$，换言之，$\eta(v)$ 取决于将 v 放在哪里。一个直观的观察是：如果我们将 η 只作用于某一点附近的长度极短的向量，那么两个条件都被满足！为了将这一定义推广到全曲面，我们定义 $\xi_p(v)$ 是 v 在 p 点的切平面中穿过的等高线的数目与间隔的乘积，这样我们实际上获得了 1-形式场 ξ_p，这个场称为 $h(x,y)$ 的梯度。

除此之外，行向量、左矢都是 1-形式的例子。

1-形式的基底与分量

考虑 n 维流形上的点 p，我们选择切空间 T_p 的一个基底 $\{e_j\}$，我们就可以将任意一个向量写成：

$$v=v^je_j$$

注意我们不假设 $\{e_j\}$ 是互相正交的。我们有一种自然的方法将 $\{e_j\}$ 与 $T_p^\star$ 的一组基底 $\{\omega^i\}$ 联系起来：

$$\omega^i(v) = v^i \quad or \quad \omega^i(e_j) = \delta^i_j$$

注意：我们不能说 ω^1 是 e_1 的对偶，ω^2 是 e_2 的对偶，这里可以看下面两幅图：我们改变了 e_2，这不仅使得 ω^2 改变了，还使得 ω^1 改变了：

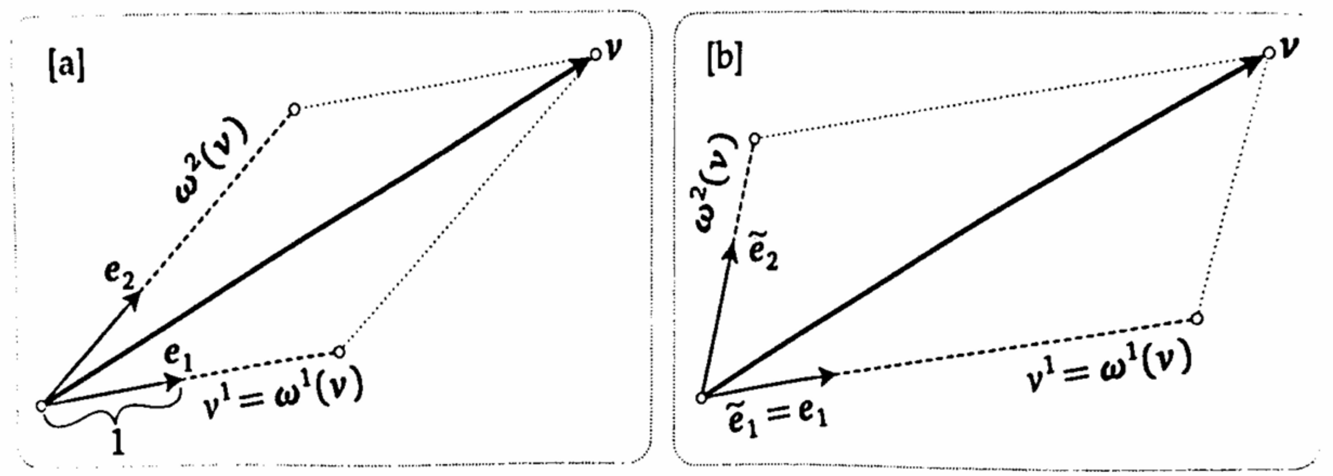

图 32-6 [a] 第一个基底 1-形式 $\{\omega^1\}$ 选出了 ν 的第一个分量；同样，第二个基底 1-形式 $\{\omega^2\}$ 选出了第二个分量. [b] 用与前面同样的 $\tilde{e}_1$，仅改变 $\tilde{e}_2$ 就会引起两个基底 1-形式改变

接下来我们定义 1-形式的分量：考虑一个 1-形式 ϕ 作用在矢量 v：

$$\phi(v) = \phi(v^j e_j) = v^j \phi(e_j) = \omega^j(v)\phi(e_j)$$

我们将实数 $\phi_j = \phi(e_j)$ 称为 1-形式 ϕ 的分量。观察一下：1-形式的基 ω^j 负责将相匹配的 e_j 映射到 1，而 1-形式的分量负责（数）乘在基底前面，从而决定 ω^j 将 e_j 映射的结果扩大几倍，我们现在有：

$$\phi(v) = \phi_j \omega^j(v) \Rightarrow \phi = \phi_j \omega^j = \phi(e_j)\omega^j$$

其他例子和解释

例子：梯度是 1-形式

在向量微积分中，$\mathbb{R}^2$ 中函数 f 的梯度被定义为：

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{bmatrix} f$$

它有性质：∇f 指向 f 增大最快的方向，它的大小 $|\nabla f|$ 等于我们沿着这个方向移动 f 时的最大增加率。这很容易证明：设 e_1, e_2 是沿着 (x, y) 轴的正焦急地，考虑沿着短向量 $v = \delta x^1 e_1 + \delta x^2 e_2$ 移动时 f 的变化，那么显然有：

$$\delta f = (\nabla f) \cdot v = (\partial_x f)dx + (\partial_y f)dy$$

我们还可以定义出方向导数：

$$|\nabla_{\hat{v}} f| = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = |\nabla f| \cos\theta$$

我们现在要说明 df 是一个 1-形式，它显然也是由对向量的作用定义的：

$$\mathbf{d}f(v) = \nabla_v f$$

这里加粗的算子 $\mathbf{d}$ 称为外导数，我们验证一下：

$$(\mathbf{d}f)(v_1 + v_2) = \nabla_{v_1} f + \nabla_{v_2} f = \mathbf{d}f(v_1) + \mathbf{d}f(v_2) \quad (\mathbf{d}f)(kv) = k\mathbf{d}f(v)$$

由于 ∇_v 服从乘法规则，因此外导数算子 $\mathbf{d}$ 也服从乘法规则。

我们现在给出 1-形式的笛卡尔基（一组像 e_x, e_y, e_z 一样的正交基）。考虑 $\mathbf{d}x$ 作用在向量 v 上的效果：

$$(\mathbf{d}x)v = \nabla_{v^1 e_1 + v^2 e_2} x + (v^1 \nabla_{e_1} + v^2 \nabla_{e_2})x = v^1$$

在推导中已经使用了 e_1, e_2 是笛卡尔基底的事实。我们发现 $\mathbf{d}x$ 作用在 v 上时只筛选出了 v 的第一个分量，$\mathbf{d}y$ 也是同理。这意味着 $\mathbf{d}x, \mathbf{d}y$ 是与 $\{e_1, e_2\}$ 对偶的一组基。从可视化的角度来看，1-形式 $\mathbf{d}x$ 被可视化为垂直于 x 轴的平面族。我们显然有：

$$(\mathbf{d}x^i)e_j = \delta^i_j$$

因此，我们将 $\{\mathbf{d}x^j\}$ 称为笛卡尔基。那么，我们就可以将梯度这一 1-形式分解到笛卡尔基上：

$$\mathbf{d}f = [(\mathbf{d}f)e_j]dx^j = [\partial_{x^j} f]dx^j$$

这个梯度的表达式在写法上与经典形式是相同的，然而，我们已经赋予了它全新的意义。此外，前面我们从地形图中得到的 1-形式就是这里的梯度。

可视化：1-形式加法的几何意义

之前，我们总是使用平面族来可视化 1-形式，我们已经知道了 1-形式的数乘在可视化上对应的变化是平面族疏密的变化，那么 1-形式的加法代表了什么？如图所示，我们将 $2\mathbf{d}x$ 和 $\mathbf{d}y$ 的平行直线束叠加起来，形成新的直线束，这就是 1-形式加法的可视化。

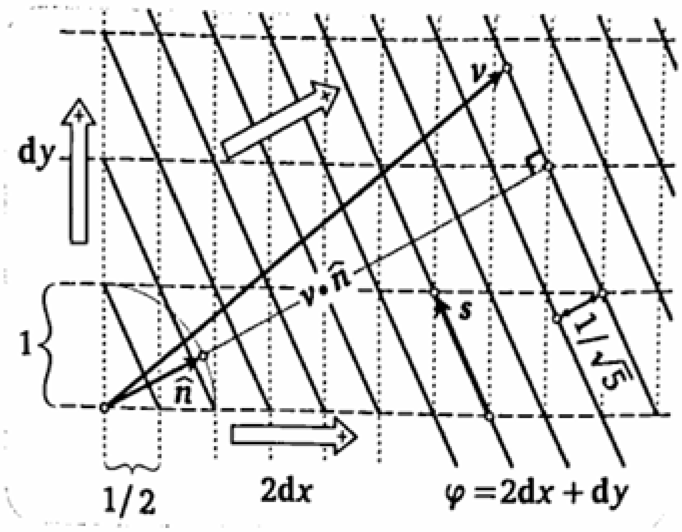

图 32-9　1-形式的几何加法. 将两个 1-形式 $2dx$ 和 dy 相加，即将它们的平行直线束叠加起来，然后将得到的交点连接起来创建 $\varphi = 2dx + dy$ 的平行直线束

完成这个证明的方式多种多样，例如：1）计算新的 1-形式 $\tilde{\phi}$ 作用在任意向量上的值；2）考察 $\tilde{\phi}$ 的核。