Chapter 30：广义相对论初步：从潮汐力开始

#DifferentialGeometry

> “空间告诉物质如何移动，物质告诉空间如何弯曲。“

换言之，自由落体沿弯曲空间的测地线移动，只不过此时的测地线使得时空度量测量的距离最大化；而爱因斯坦的引力场方程则告诉我们物质和能量如何弯曲时空。

比萨斜塔与流浪地球

让我们先从比萨斜塔实验的解释开始。不管是真的还是假的，伽利略在比萨斜塔上做了著名的"铁球实验"，实验的结果是两个铁球同时落地。这很好解释——根据牛顿的万有引力定律，我们有一个巨大的质点 M 和一个与之相比极小的质点 m，那么小质点 m 的运动方程为：

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2}$$

因此，所有小质点都沿着相同的轨迹运动。

现在我们考虑另一个场景，这也是爱因斯坦的惊人洞见——根据牛顿力学我们知道，做自由落体的人是感受不到自身的重力的，那么我们如何感受到重力呢？假设我们在太空中静止，以我们的身体为中心的球面上分布着大量质点，它们初始也是静止的。现在时间开始流动，我和质点都开始在地球的引力场中自由落体，接下来（在我们的参考系中）会发生什么？

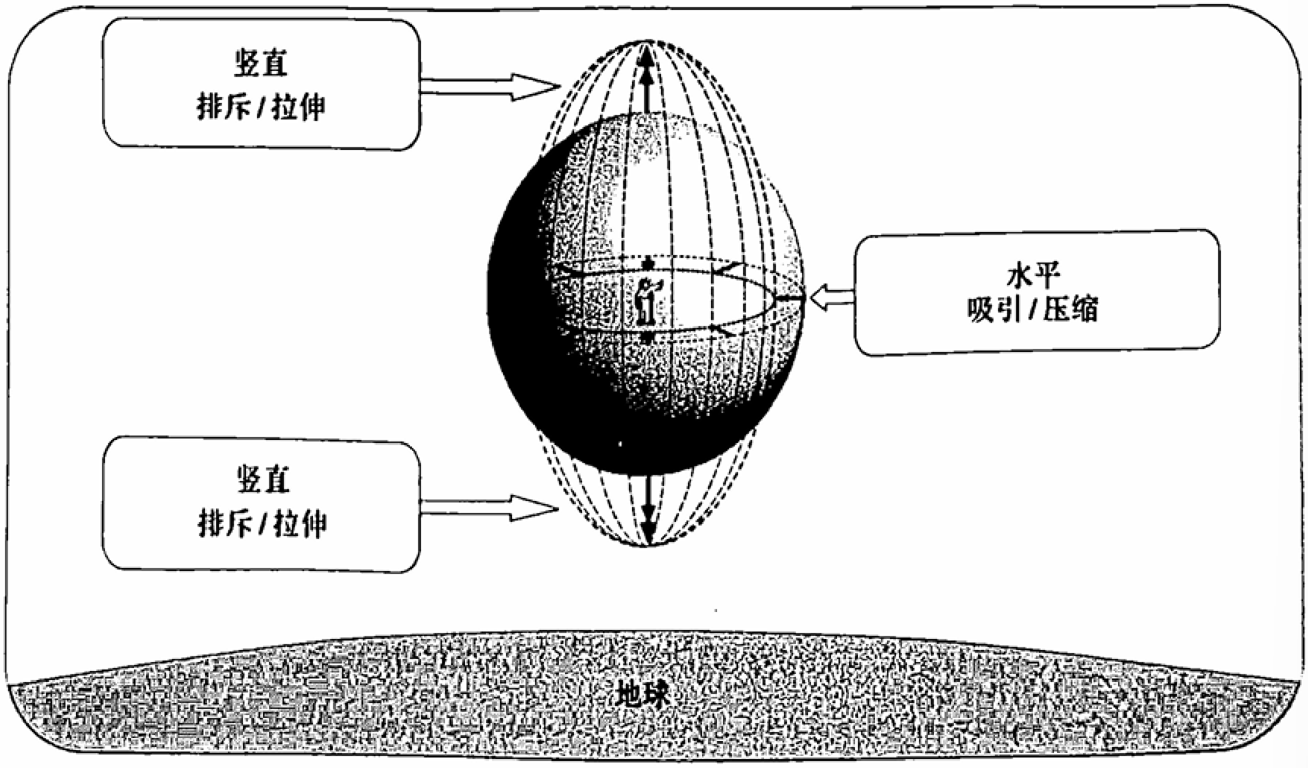

图 30-1　地球重力的潮汐力作用于自由下落的粒子排列成的球面，导致在水平的“赤道”平面（平行于地球表面）内压缩，而在沿重力场的竖直方向上拉伸．当这个球面下落时，它就开始变成椭圆的蛋形．因为平方反比定律，竖直方向的拉伸力恰好就是赤道方向压缩力的 2 倍

如图，答案是这些粒子将变成一个“鸡蛋”——这是因为（在地心系中）这些粒子实际上都是向着地心加速的，因此环绕我们周身的粒子将会被向中间吸引，头顶的粒子加速度小于我们，而脚底的粒子加速度大于我们。也就是说，在我们的参考系中看来，有一种无形的力扭曲了这些质点，（按照经典力学中的说法）这个引力与惯性力的合力被称为潮汐力。地球上的大潮、小潮，以及一个小星体接近一个大星体到某个距离

（洛希极限）时会被撕裂，都与这种潮汐力有关。

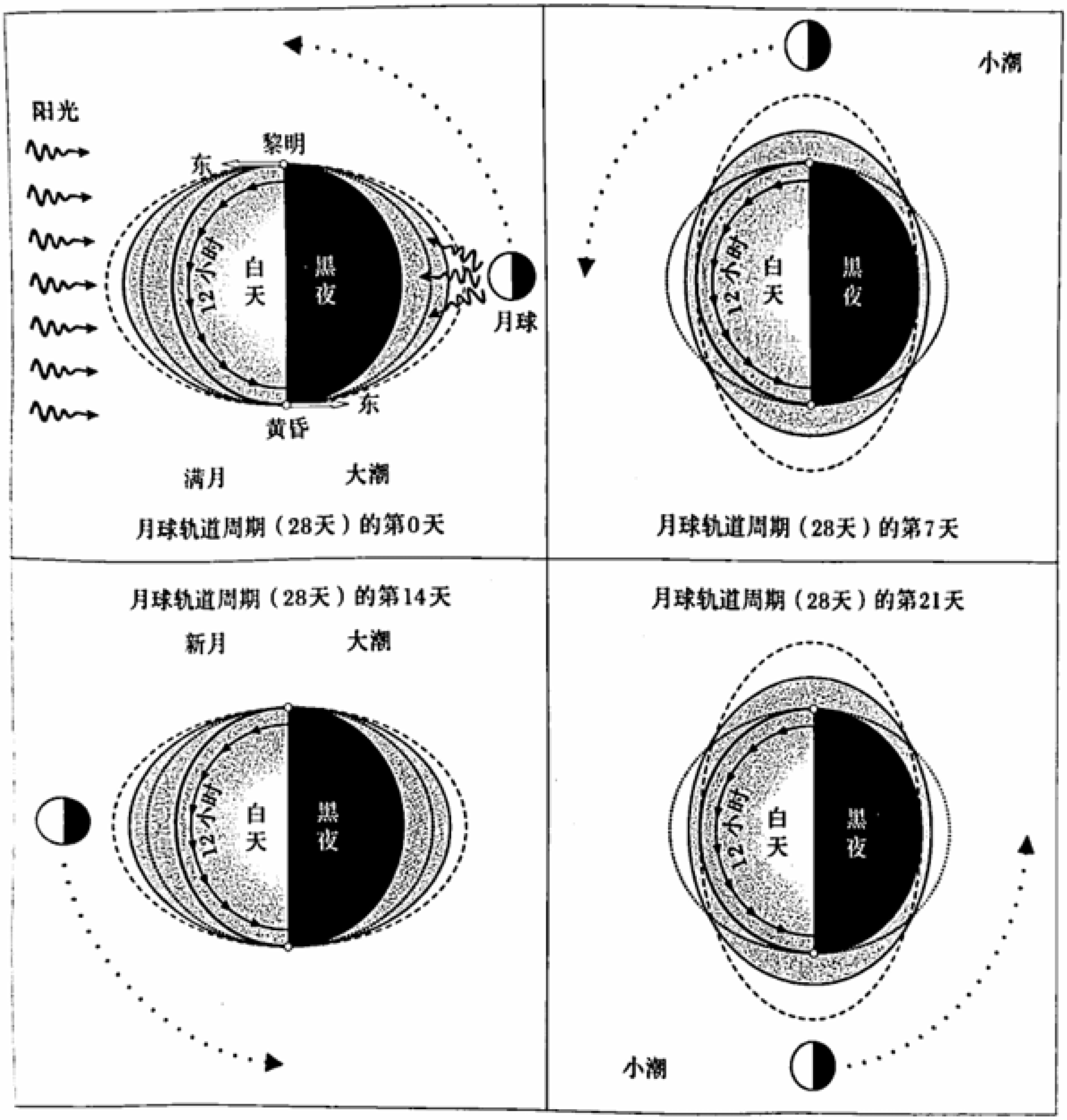

图 30-2 海洋潮汐的解释．月球的潮汐力（短划线）和太阳的潮汐力（点虚线）联合起来扭曲了海平面（椭圆形阴影区域），产生了潮汐．（注意：这里不是按比例画的．海洋和潮汐被夸大了很多，而地球到月球的距离缩短了很多！）左上图显示的是月球被照亮的一面面向地球，反射的阳光被我们看作满月．因为太阳和月球的潮汐力在同一直线上，它们相互加强，形成落差最大的高潮和低潮，这就是大潮．右上图显示，较强的月球潮汐力被正交方向的太阳潮汐力抵消了一部分，形成落差最小的高潮和低潮，这就是小潮

万有引力定律的几何形式

设我们到地球中心的距离为 r，ξ 是我周围的粒子排成的球面水平方向上“赤道”圆周的半径，$\delta\phi$ 是地球中心相对于 ξ 的圆心角，那么 $\xi = r\delta\phi$。由于我和这些粒子都被吸引

向地球中心，因此 $\delta\phi$ 在下落过程中不变。因此我们有：

$$\ddot{\xi} = \ddot{r}\delta\phi = -\frac{GM}{r^3}\xi$$

假如我们说做自由落体运动的粒子沿着测地线运行，那么这就是一个雅可比方程！它对应的曲率是：

$$\mathcal{K}_+ = +\frac{GM}{r^3}$$

考虑另一个方向，设 Ξ 代表我头顶的粒子到我脚底的粒子的距离，那么显然有：

$$\ddot{\Xi} = \delta\ddot{r} = [\partial_r \ddot{r}]\delta r = \partial_r\left[-\frac{GM}{r^2}\right]\Xi = +\frac{2GM}{r^3}\Xi$$

这同样是一个雅可比方程，这里的曲率应当是：

$$\mathcal{K}_- = -\frac{2GM}{r^3}$$

接下来我们可以考虑这个椭球体的体积变化，利用椭球体体积公式得到：

$$\mathcal{V} = \frac{4\pi}{3}\xi^2\Xi$$

通过直接对时间求导计算可以得到：

$$\dot{\mathcal{V}}(0) = \frac{4\pi}{3}[2\xi\dot{\xi}\Xi + \xi^2\dot{\Xi}] = 0$$

以及：

$$\ddot{\mathcal{V}}(0) = \frac{4\pi}{3}[2\ddot{\xi} + \ddot{\Xi}] = 0$$

我们可以看到，在潮汐力的作用下，这个椭球体积是在二阶意义上保持不变的。我们现在希望证明只有平方反比引力可以做到这一点。为此，我们假设引力函数的形式是 $\ddot{r} = f(r)$，从而经过代入直接计算：

$$\ddot{\mathcal{V}} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} + \frac{2f}{r} = 0 \Rightarrow f(r) \propto \frac{1}{r^2}$$

在上面的分析中，我们忽略了处在这个椭球中的质量的影响。现在假设我们在椭球内部填充密度为 ρ（极大）的物质，那么整个球上的所有粒子会排列成 $\xi = \Xi$ 的球面向中心加速飞行，加速度是：

$$\ddot{\xi} = -\frac{G\rho\mathcal{V}}{\xi^2}$$

现在仍然可以计算体积对时间变化的一、二阶导：

$$\dot{\mathcal{V}} = 4\pi\xi^2\dot{\xi} \quad \ddot{\mathcal{V}} = -4\,piG\rho\mathcal{V}$$

如果我们现在在地球引力场中发射这个物体（一个球体，内部装填了密度为 ρ 的物质，外面有一层质量很轻的测试粒子），那么外层粒子的运动状态应当是以上两种运动的叠加——一边收缩，一边倾向于变成椭球体。

时空度规与时空图

首先，时空 (t,x,y,z) 在局部的切空间是闵可夫斯基时空，其度规为：

$$ds^2 = dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = [dx^0]^2 - ([dx^1]^2 + [dx^2]^2 + [dx^3]^2)$$

类似于曲面上的切平面，闵可夫斯基时空也是平直的——它的黎曼张量恒为零。而在流形上相邻点之间的真实距离由度规张量 $g(u,v)$ 决定，如果 ϵ 是连接时空中两个相邻事件之间的向量，那么它们之间距离的平方是 $ds^2 = g(\epsilon,\epsilon)$。如果 $\{e_i\}$ 是任一四维度量空间的四个基向量的集合，我们都可以如同前面的黎曼张量一样，给出度规张量的分量：

$$g_{ij} = g(e_i, e_j) = g(e_j, e_i) = g_{ji}$$

那么：

$$ds^2 = g(\epsilon,\epsilon) = g(dx^i e_i, dx^j e_j) = g_{ij}dx^i dx^j$$

例如，在闵可夫斯基时空中有 $g_{00} = +1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$，而在一般情况下，$g_{ij}$ 是时空的函数。此外，g_{ij} 的具体形式还与坐标有关。

由于我们通常无法想象四维时空，常见的做法是绘制三维的时空图——使用一个竖直方向表示时间，而将空间的三个维度保留两个。

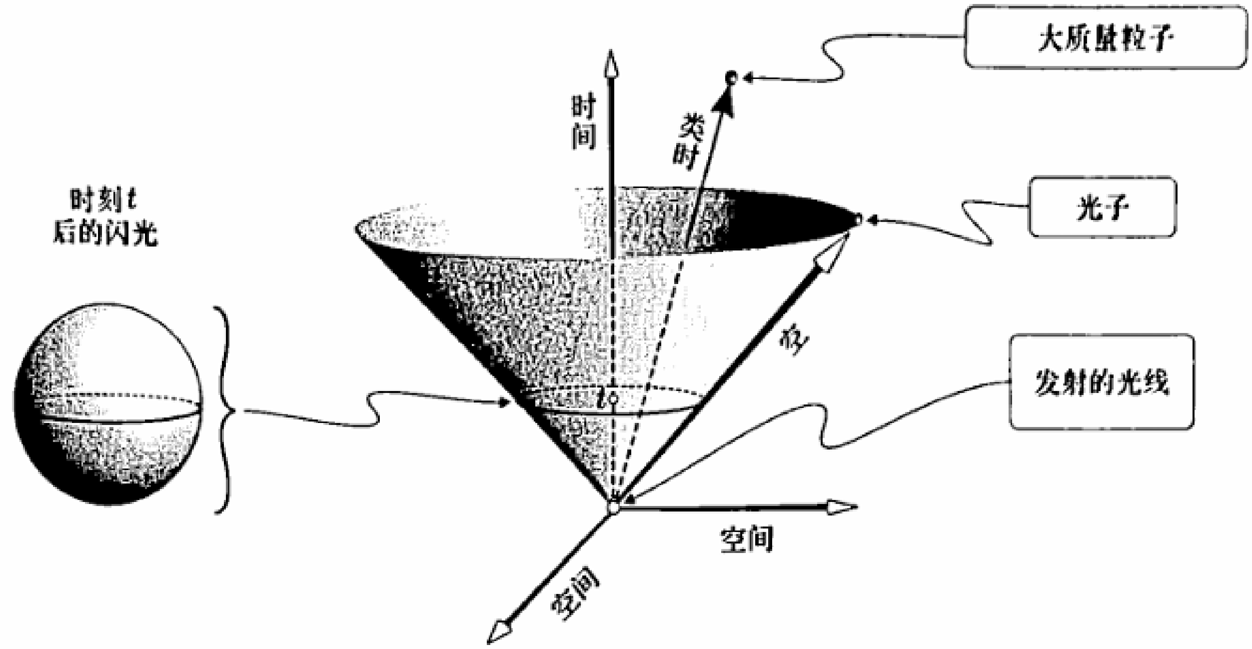

图 30-3　时空中的零锥（光锥）．时间由竖直方向表示，（三个中的）两个空间方向用正交的水平方向表示．一束光线从时空中的一个事件发射出来，它在时刻 t 扩张成的光球面用它的圆周截线表示．所以，这束光线的整个未来用一个锥面表示，光子的世界线是这个锥面的空母线．物质粒子在这个锥面内沿类时世界线运动，运动的速率低于光速

如图展示了闵可夫斯基时空中的光锥，显然，有质量粒子的世界线只能在光锥内部，我们将世界线的切向量称为四维速度。

爱因斯坦真空场方程的几何形式

让我们再次将目光移到潮汐力作用下的航天员和粒子球上，我们在航天员系中绘制各个物体的世界线如下（"大质量"代表地球）：

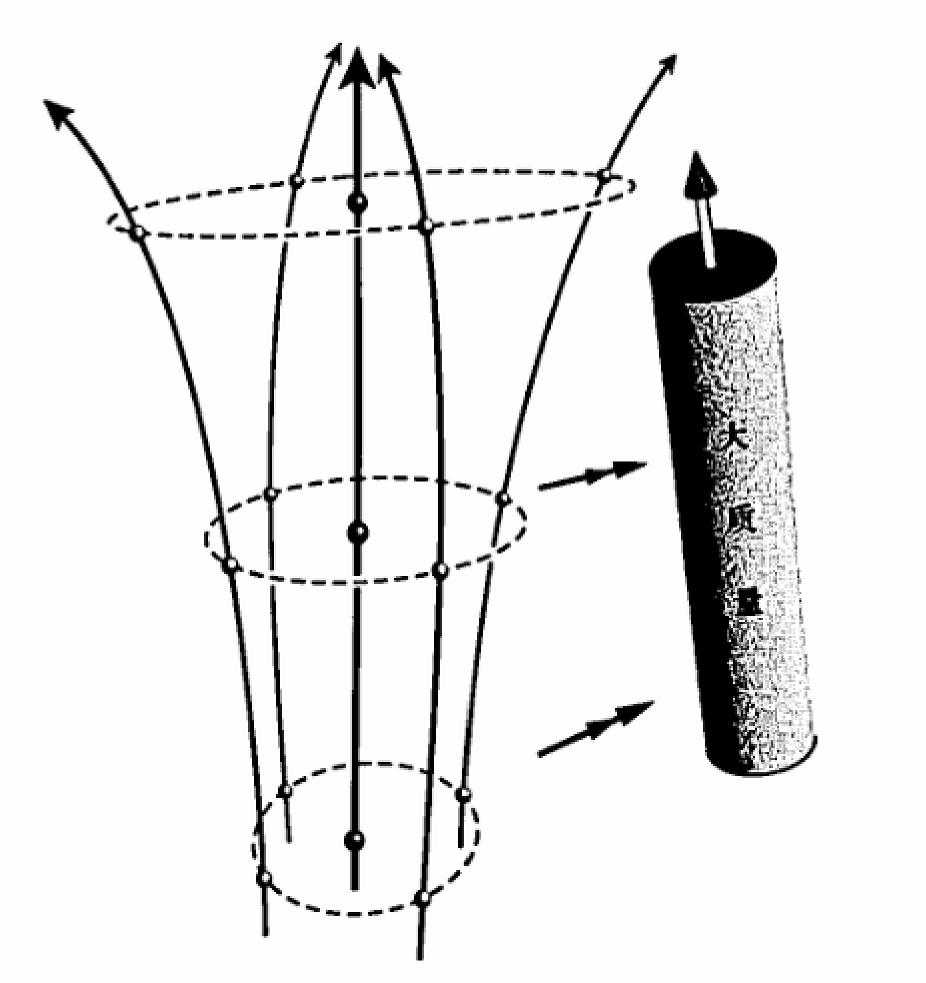

图 30-4　潮汐变形的时空描述，自由下落的球体变成“蛋”. 通常，时间沿竖直方向

现在考虑由航天员自身的四速度 v 和航天员到周围质点的连线 ξ 生成的平面 $\Pi(v,\xi)$，上文中的讨论其实就是给出了两个正交平面上的截面雅可比方程。当然，我们忽略了第三个与前两个平面正交的平面，容易发现第三个平面上的雅可比方程对应的曲率也是 $\mathcal{K}_+ = \dfrac{GM}{r^3}$。从上一节中里奇曲率张量的引入过程，我们立刻知道：

$$\overline{\mathcal{K}} = \frac{1}{3}(\mathcal{K}_+ + \mathcal{K}_+ + \mathcal{K}_-) = 0 = \frac{1}{3}\mathbf{Ricci}_{00}$$

另外，从体积的二阶导为零，我们还可以写出：

$$\mathbf{Ricci}(v,v) = 0$$

之前我们取 $v = e_0$，是沿着时间轴向上的四速度，但是实际上只要我们以一个类似地四速度发射这个整体，上式都是成立的。现在取 $v = x + y$，其中 x, y 是任意类时向量，利用里奇张量的对称性有：

$$0 = \mathbf{Ricci}(v,v) = \mathbf{Ricci}(x,x) + \mathbf{Ricci}(y,y) + 2\mathbf{Ricci}(x,y) = 0$$

从而立刻得到

$$\mathbf{Ricci}_{ik} = 0$$

这正是**真空中的爱因斯坦场方程**!

历史注记：真空场方程的（现象）验证

施瓦西解

施瓦西接是迄今为止发现的第一个精确解，它描述了一个球对称非自旋的质量 M 之外的真空区域的时空，这个解是由卡尔·施瓦茨希尔德一战期间在前线服役时发现的，它给出的时空度规是：

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \dfrac{2GM}{r}} - r^2(d\phi^2 + \sin^2\phi d\theta^2)$$

在 $r = r_s = 2GM$ 时，g_{rr} 分量会变得奇异，我们后面会再来聊这个事情。

爱因斯坦也对自己的理论做出了一些预测：

- 光的引力红移
- 水星进动
- 太阳对光线的偏折
  此外，简单的施瓦西解在日常生活中广泛应用——GPS 定位系统就是一个很好的证明。

引力波

下图显示了引力波穿过试探粒子时，在垂直于波的传播方向上粒子将震荡，在一个方向上被拉长，而另一个方向缩短：

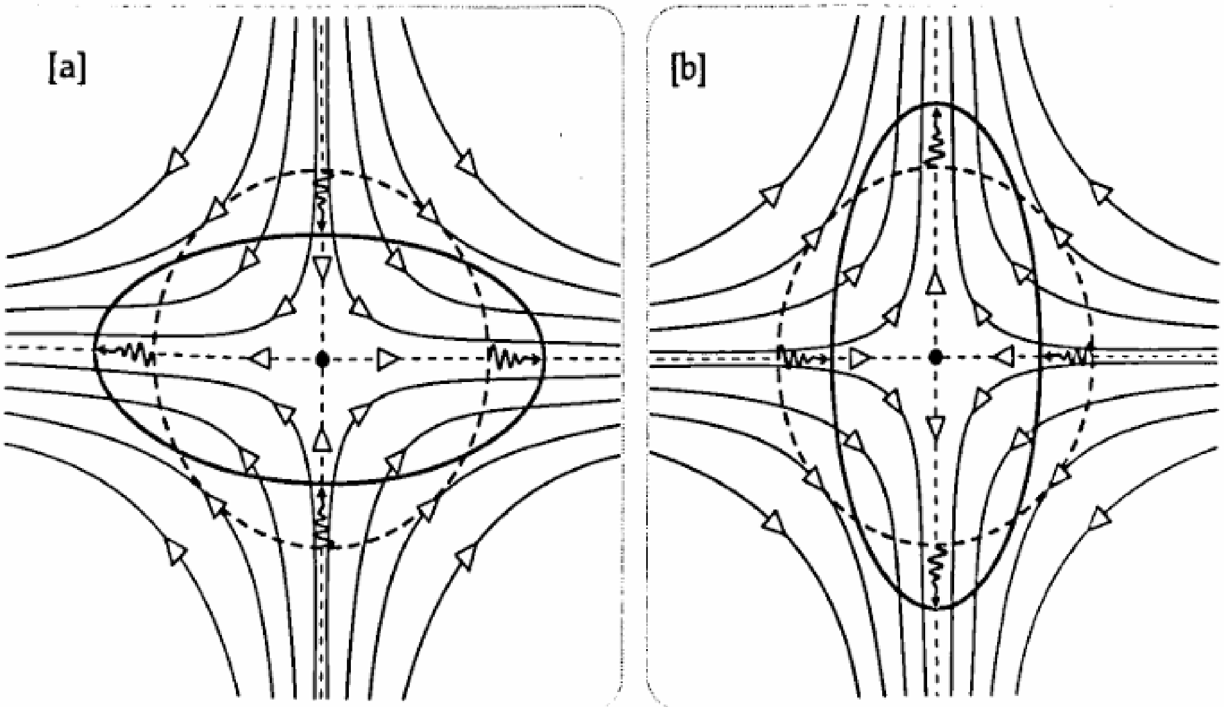

图 30-7 引力波的振荡潮汐力场. 当引力波穿过由粒子排列成的球面时, 它对间隔平行于波的传播方向(在此垂直于纸面)的粒子没有影响. 但在与波传播方向正交的平面上, 引力波在两个相互正交的方向(在此表现为水平和竖直方向)上引起扩张和压缩的振荡. [a] 测试粒子排列成的(虚线)圆周变形成(实线)椭圆. [b] 半波长后波的潮汐力场的反转, 现在的拉伸方向与原来的拉伸方向正交. 当引力波通过时, 力场在这两种相反的模式之间来回振荡

我们现在探测到的引力波往往由黑洞或中子星合并产生。

爱因斯坦场方程的几何形式

现在我们考虑向测试粒子的球体内装填了物质的情况。对于 $\delta\mathcal{V}$ 求体内装有密度为 ρ 的物质的情形，有：

$$\mathbf{Ricci}(v,v)\delta\mathcal{V} = -\delta\ddot{\mathcal{V}} = 4\pi G\rho\delta\mathcal{V} \Rightarrow \mathbf{Ricci}(v,v) = 4\pi G\rho$$

这里的 v 仍然是任意类时矢量。 为了进一步取得进展，我们要引入所谓能量-动量张量，这夜色一个对称的张量，记为 T_{ik}，对于我们而言，需要特别注意的是：

$$T(v,v) = \rho_{tot}$$

这里的 ρ_{tot} 是物质和能量的总密度（我们可以不严格地说，物质和能量是等效的），因此我们可以写出：

$$\mathbf{Ricci}(v,v) = 4\pi GT(v,v)$$

令 $v = e_0$，那么我们有：

$$R_{00} = 4\pi G \rho_{tot}$$

如果 v 是任意类时向量，我们仍然可以用之前的技巧推出：

$$R_{ik} = 4\pi G T_{ik}$$

这是爱因斯坦的最初方案，然而这是不正确的，因为这个方程结合之前提到的微分比安基恒等式可以推出能量不守恒，我们可以对其进行修正，作为介绍，我们不加证明地给出结论：记 T 为能动量张量的迹，我们有：

$$\mathbf{R}_{ik} = 8\pi G \left(T_{ik} - \frac{1}{2} T g_{ik} \right)$$

它的一个等价形式是：

$$\mathbf{G}_{ik} = \mathbf{Ricci}_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = 8\pi G T_{ik}$$

这里的 R 是里奇张量的迹，左侧的 $\mathbf{G}$ 称为爱因斯坦张量。

黑洞的简介

当恒星的质量非常大时，“死亡”时可能坍缩成黑洞。一个黑洞的形成过程如下图所示：

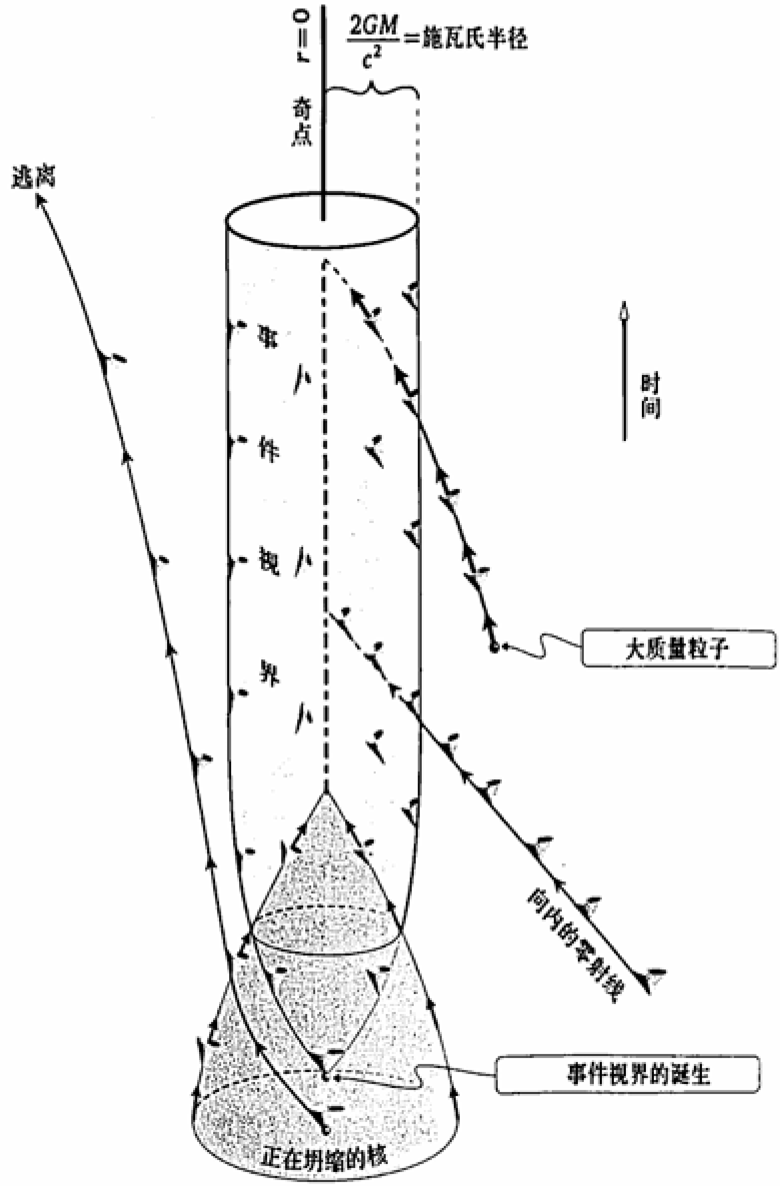

图 30-9 黑洞的诞生：超新星核的引力坍缩．爱因斯坦的场方程告诉我们，一个质量足够大的核的坍缩将达到一种不可逆转的情况：引力将无情地将整个核挤压成一个密度无穷大、潮汐力无穷大的点 ($r=0$)，称为时空奇点；剩下的是一个纯净的真空引力场．如果从正在坍缩的核的中心足够早地发射出一束闪光，它就能逃离引力场．然后，会出现一个关键时刻：从中心发出的闪光光球起初膨胀，然后速度变慢，最终悬停在施瓦氏半径 $r_s=2GM/c^2$ 上．这个悬停的光球面就是事件视界，它的内部是一个黑洞：一旦形成，任何物质或信息都不可能逃离这个区域．零锥与视界相切，因此它们允许物质和光向内通过，但从不向外通过，因为物质总是在零锥内部传播

第四幕的终曲：我们需要宇宙学常数吗

现在我们来闲聊一会。在 1916 年，人们普遍认为宇宙是静止不变的（那时人们认识的宇宙还只有银河），然而上面的场方程却导向了一个膨胀的宇宙，于是，为了挽救“静止的宇宙”，爱因斯坦对他的场方程做了修改：

$$G + \Lambda g = 8\pi G T$$

这里的 Λ 称为宇宙学常数。然而，1929 年，哈勃发现了所有的星系都有远离我们的速度，这些星系的速度与离开我们的距离成正比。爱因斯坦后来将这个改变称为“我一生中最严重的错误”。

Λ 恒等于 0 吗？现在的科学家发现宇宙在加速膨胀，这与哈勃的推测（引力将减缓宇宙膨胀）相悖，也许爱因斯坦的宇宙常数就是对这个现象的很好的解释吧。