1.3 Day 3: 欲于状态空间起舞

在之前的章节（经典控制）中，信号在时间上的无穷延展使我们将其视作希尔伯特空间中无穷维的矢量，LTI 系统作为正规算符对信号进行线性变换。这种处理方法使得我们忽略了信号和系统输出的时间演化信息。本节中我们将研究系统输出如何随时间演化，这意味着我们将一直在时间表象中处理问题。一般而言，LTI 系统的状态演化由一阶微分方程组给出：

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx + Du \tag{1.38}$$

其中 A, B, C, D 分别为实的 $N \times N, N \times M, P \times N, P \times M$ 的矩阵；x 是系统的状态，它生活在 $\mathcal{S} = \mathbb{R}^n$（被称作“状态空间”）中，$u$ 是输入，Bu 作为 N 维矢量，生活在状态空间 $\mathcal{S}$ 上某点处的切空间中。y 是我们通过传感器等方式观测到的系统输出。

1.3.1 状态空间中的稳定性判据

首先考虑无输入系统 $\dot{x} = Ax$ 的稳定性。显然我们可以尝试通过选择新的基底来尝试对角化 A，这只有两个结局：

1)：A 可被对角化，此时演化方程形如：

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \lambda_N \end{bmatrix} \tilde{x}$$

$\tilde{x}$ 是在新基底下系统状态的分量。此时每个维度上已经解耦，要使得 $\tilde{x}$ 的模长不随着时间爆炸，A 的所有本征值的实部都应当位于虚轴左侧。

2)：系统不可被对角化，此时演化方程中将出现这样的 Jordan 块：

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \cdots & \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} \tilde{x}$$

对于一个 $R \times R$ 的 Jordan 块 A，有 $A^R = 0$，因此 $\exp(At)$ 将在有限项被截断，仍可以给出计算上述方程的解：

$$\tilde{x}(t) = \exp(At)\tilde{x}(0) = \exp(\lambda t) \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{R-1}}{(R-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{R-2}}{(R-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{t^{R-3}}{(R-3)!} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{x}(0)$$

同样地，若要求 $\tilde{x}$ 的模长不爆炸，也应当令 λ 位于虚轴左侧。因此，无输入 MIMO LTI 系统的平衡状态 $x = 0$ 渐近稳定的充要条件是**矩阵 A 的本征值全部位于虚轴左侧**，这种判据称为李雅普诺夫第一判据。

还有一种非常直观的稳定性判据（第二判据）：若存在具有连续一阶导数的标量场 $V(x)$，使得 $V(0) = 0$，且 $\forall x \neq 0$ 有：1）$V(x)$ 正定；2）$\dot{V}(x)$ 负定；3）$\lim_{\|x\|\to\infty} V(x) \to \infty$，则系统的平衡状态 $x = 0$ 是渐近稳定的。直观上，我们为系统构造了能量 $V(x)$，它沿着轨迹单调下降且有下界，因此系统最终必将停止在能量最低点处。一般而言，$\dot{V}(x)$ 负定的能量函数不易构造，我们常使用放松后的第二判据：$\forall x \neq 0$，1）$V(x)$ 正定；2）$\dot{V}(x)$ 半负定；3）$\lim_{\|x\|\to\infty} V(x) \to \infty$；4）考虑集合 $\{x \mid \dot{V}(x) = 0\}$，集合中除了 $x(t) = 0$ 这一平凡轨迹外，不包含任何其他完整轨迹。这里我们修改了条件 2）为半负定，同时增补了条件 4）。

稍举一例来说明如何理解放松后的第二判据。考虑系统：

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = -x_1 - (1+x_2)^2 x_2$$

取能量函数 $V(x) = x_1^2 + x_2^2$，则 $\dot{V}(x) = -2x_2^2(1+x_2)^2$ 半负定。$\dot{V}(x)$ 有两条“山谷”：$x_2 = 0$ 和 $x_2 = -1$，我们应确保不可能有轨迹沿着这两条“山谷”前进。考察轨迹 $x(t) = [x_1(t), 0]^T$，由 $\dot{x}_2 = 0$ 给出 $x_1 = 0$，从而不可能有 $x(t) = [x_1(t) \neq 0, 0]^T$ 这样的轨迹。对于另一边可类似分析。因此根据放松后的第二判据，仍可判断 $x = 0$ 是渐近稳定的。

李雅普诺夫第一判据是只能对 LTI 系统使用的判据，而第二判据则可对任意系统使用，下面对 LTI 系统证明二者的等价性。先证明第二判据能推出第一判据：对于 LTI 系统而言，最简单的正定函数构造方式是取正定矩 P，构造 $V(x) = x^T P x$，那么 $\dot{V}(x) = x^T(A^T P + PA)x$，第二判据告诉我们，只要存在正定矩阵 P，使得 $Q = -A^T P + PA$ 也正定，则平衡点必渐近稳定，应证明这个条件能推出 A 的本征值实部均为负数。两侧乘以 A 的本征矢 v：

$$v^\dagger(A^T P + PA)v = -v^\dagger Q v$$

注意这里 A 是实矩阵，从而：

$$(Av)^\dagger Pv + P(Av) = -v^\dagger Q v \Rightarrow (\lambda^\star + \lambda)(v^\dagger P v) = -v^\dagger Q v \Rightarrow 2\mathrm{Re}(\lambda) = -\frac{v^\dagger P v}{v^\dagger Q v}$$

由于 P, Q 均正定，立刻推出 A 的本征值实部为负, 这就得到了第一判据。再证明第一判据能推出第二判据：若 A 的本征值全为负，取正定矩阵 Q，令 $P = \int_0^\infty \exp(A^T t) Q \exp(At) \mathrm{d}t$，直接计算：

$$\begin{aligned} A^T P + PA &= A^T \left(\int_0^\infty \exp(A^T t) Q \exp(At) \right) + \left(\int_0^\infty \exp(A^T t) Q \exp(At) \right) A \\ &= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\exp(A^T t) Q \exp(At) \right) \mathrm{d}t = -Q \end{aligned}$$

这就得到了第二判据。从而我们完成了（LTI 系统中）两个判据等价性的证明。

还有一个非常神奇的地方：在经典控制理论中，我们使用传函的极点判断平衡点稳定性，渐近稳定的判据是所有极点均在虚轴左侧。这个判据和我们现在给出的 A 的本征值判据非常相似，二者之间是否有联系呢？为此，我们需要先将经典控制中使用传函描述的系统转换成状态空间模型。设一个 SISO LTI 系统的传函是：

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s^1 + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s^1 + a_0}$$

且分子分母已无公因式可以提出。这个系统应该被拆成系统本身（对应状态空间模型中的 $\dot{x} = Ax + Bu$）和输出方程（对应状态空间模型中的 $y = Cx + Du$）的串联，系统本身是：

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} x}{\mathrm{d}t} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_0 x = u(t)$$

它的传函是 $\dfrac{1}{D(s)}$，而输出方程是：

$$y = \frac{\mathrm{d}^m x}{\mathrm{d}t} + b_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1} x}{\mathrm{d}t} + \cdots + b_0 x$$

它的传函是 $N(s)$。考虑取状态变量 $z_0 = x, z_1 = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \cdots z_{n-1} = \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t}$，$z = [z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}]$，系统的状态空间模型是：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

现在要求 A 矩阵的本征值，我们以 A 矩阵的行（列）数为奇数的情况作为例子来看。考虑矩阵 $A-\lambda I$：

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1}-\lambda \end{bmatrix}$$

对最后一行展开来获得其行列式。对 $-a_0$ 展开时，消去 a_0 所在的行列，剩下的矩阵是三对角矩阵，对角全为 $+1$，因此在本征多项式中贡献 $-a_0$；对 $-a_1$ 展开时，有一个 $-\lambda$ 进入对角线，因此在本征多项式中贡献 $-a_1\cdot(-1)\cdot(-\lambda)=-\lambda a_1$，……直到计算出最后一项的贡献是 $-\lambda^{n-1}a_{n-1}-\lambda^n$，因此矩阵 A 的本征多项式是：

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$$

因此 A 矩阵的本征值就是传递函数的极点。这样，适用于 MIMO 系统的李雅普诺夫第一判据就与适用于 SISO 系统的极点位置判据一致了！

1.3.2 系统的可控性与可观性

可控性是判断我们有多大自由度来改变系统状态的性质；可观性则是判断我们能否通过观测一段时间内系统的输出 $y(t)$ 来确定系统初始条件的性质。首先我们研究可控性。最基本的可控性的定义是从某状态到某状态的可控性：若某一系统存在控制律 $u(t),t\in[0,T]$，使得该系统能从初始状态 $x(0)=x_A$ 转移到终末状态 $x(T)=x_B$，则称系统具有 $x_A\to x_B$ 可控性。显然，我们非常迫切地想知道的事情是：对于 $\forall x_A,x_B\in\mathcal{S}$,，系统是否都有 $x_A\to x_B$ 的可控性呢（下文简称为任意可控性）？对于 LTI 系统而言，这个复杂的问题被简化：只要系统有 $0\to x_B,\forall x_B\in\mathcal{S}$ 的可控性，则系统有任意可控性。这是因为对于 LTI 系统有：

$$x(t)=\exp(At)x(0)+\int_0^T\exp[A(T-\tau)]Bu(\tau)\mathrm{d}\tau$$

系统有 $0\to x_B,\forall x_B\in\mathcal{S}$ 的可控性意味着 $\forall x_B\in\mathcal{S}$，$\exists u(t),t\in[0,T]$ 使得 $\int_0^T\exp[A(T-\tau)]Bu(\tau)\mathrm{d}\tau=x_B$。将 x_B 换成 $x_B-x_A\exp(AT)$，就证明了系统的任意可控性。因此，研究 LTI 系统是否有任意可控性的问题归结为是否存在输入 $u(t)$ 将零初始状态的系统移动到任意状态的问题。直观上来看，$\int_0^T\exp[A(T-\tau)]Bu(\tau)\mathrm{d}\tau$ 这个东西其实是不同时间上 $\exp[A(T-\tau)]Bu(\tau)$ 的线性组合，因此我可以让不同时间点上的输入分别将系统推向 $\mathcal{S}$ 中不同的方向，只要最终所有时间点上的移动能够覆盖 $\mathcal{S}$ 中 N 个独立的方向即可。因此，考虑 $\mathcal{S}$ 的子空间：

$$\mathcal{C}=\mathrm{span}\left\{\bigcup_{t\in[0,T]}\mathrm{Img}[\exp(At)B]\right\}$$

这是能够覆盖不同时间点上 $\exp(At)B$ 的像空间的最小子空间，也就是通过任意调整各时间点上的输入 $u(t)$，系统状态所能达到的区域。下面我们将证明：

$$\mathcal{C}=\mathcal{C}_M=\mathrm{Img}\{[B,AB,A^2B,\cdots A^{N-1}B]\} \tag{1.39}$$

先证明 $\mathcal{C}\subset\mathcal{C}_M$。$\mathcal{C}$ 中任意矢量可表示为 $\exp(At)Bv,t\in[0,T],v\in\mathbb{R}^M$，由哈密顿-凯莱定理，$\exp(At)$ 的无穷级数可以被截断：

$$\exp(At)Bv=[\alpha_0(t)B+\alpha_1(t)AB+\cdots+\alpha_{N-1}(t)A^{N-1}B]v$$

取 $w=[\alpha_0(t)v^T,\alpha_1(t)v^T,\cdots\alpha_{N-1}(t)v^T]^T$，立刻有：$w=\exp(At)Bv$，证明完成。再证明 $\mathcal{C}_M\subset\mathcal{C}$，直接研究这两个子空间比较困难，不如研究它们的正交补，转而证明 $\mathcal{C}^\perp\subset\mathcal{C}_M^\perp$。$z\in\mathcal{C}^\perp$ 应与 $\mathcal{C}$ 中所有矢量正交，也就是说 $z^T(\exp(At)Bx)=0,\forall x\in\mathbb{R}^M,t\in[0,T]$，从而 $z^T(\exp(At)B)=0,\forall t\in[0,T]$。令 $g(t)=z^T(\exp(At)B)$，由 $g(0)=0,g'(0)=0,g''(0)=0,\cdots,g^{(n-1)}(0)=0$ 得到 $z^TB=z^TAB=z^TA^2B=\cdots z^TA^{n-1}B=0$，从而 $z\in\mathcal{C}_M^\perp$，证明完成。结合以上两段证明，我们就得到了 $\mathcal{C}=\mathcal{C}_M$，这给出了判断 LTI 系统是否有任意能控性的重要判据（秩判据）：LTI 系统有任意能控性的充要条件是：

$$\mathrm{rank}\{[B,AB,A^2B,\cdots A^{N-1}B]\}=N \tag{1.40}$$

除了秩判据之外，另一个常用判据是格拉姆判据，它指出 $\mathcal{C} = \mathrm{Img}[W]$，其中

$$W = \int_0^T \exp(-At)BB^T\exp(-A^Tt)\mathrm{d}t \tag{1.41}$$

要证明这一点，我们仍然直接考察正交补，试图证明 $(\mathrm{Img}[W])^\perp = \mathcal{C}_M^\perp$。仍然先证明 $(\mathrm{Img}[W])^\perp \subset \mathcal{C}_M^\perp$，取 $w \in (\mathrm{Img}[W])^\perp$，必然有：

$$w^T\left(\int_0^T \exp(-At)BB^T\exp(-A^Tt)\mathrm{d}t\right)w = 0$$

从而：

$$\int_0^T \|w^T\exp(-At)B\|^2\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow \|w^T\exp(-At)B\|^2 = 0, \forall t \in [0,T]$$

所以又得到了 $g(t) = w^T\exp(-At)B = 0$，利用其各阶导数为 0 即可完成证明。反过来的证明 $\mathcal{C}_M^\perp \in (\mathrm{Img}[W])^\perp$ 是显然的，利用哈密顿凯莱定理即可证明。

一个神奇的事情是，能控性和时间 T 无关。尽管你可以说这是时不变系统的功劳，但是这仍然说明了在能控性的研究中，轨迹不是最基本的，轨迹的初速度/生成元才是最基本的。系统的演化方程 $\dot{x} = Ax + Bu$ 告诉我们，我们被允许前进的方向是 Ax 和 B 的各个列 $b^{(1)}, b^{(2)}, \cdots, b^{(M)}$，但是这不意味着我们只能向着这些方向走，我们将利用沿着两个矢量场移动的不对易性来找到新的方向。不妨设流形 M 上有矢量场 X^a, Y^a，分别考察“先沿着 X^a 走一小段距离，再沿着 Y^a 走一小段距离”和“先沿着 Y^a 走一小段距离，再沿着 X^a 走一小段距离”之间有何区别：计算通过两种移动方式移动后的得到的点上，某个标量场 f 的值之差：

$$\begin{aligned}
&\left[\left(1 + sX^a\nabla_a + \frac{1}{2}s^2X^a\nabla_aX^b\nabla_b\right)\left(1 + tY^c\nabla_c + \frac{1}{2}s^2Y^c\nabla_cY^d\nabla_d\right) - (\cdots)(\cdots)\right]f \\
&= sX^a\nabla_a(Y^c\nabla_cf) - tY^c\nabla_c(X^a\nabla_af) \\
&= stX^a(\nabla_aY^c)\nabla_cf + stX^aY^c\nabla_a\nabla_cf - stY^c(\nabla_cX^a)\nabla_af - stY^cX^a\nabla_c\nabla_af \\
&= st\left[X^a(\nabla_aY^c)\nabla_c - Y^c(\nabla_cX^a)\nabla_a\right]f \\
&= st[X^c\nabla_cY^a - Y^c\nabla_aX^a]\nabla_af \\
&= st[X,Y]^a\nabla_af
\end{aligned}$$

其中 ∇_a 是任一无挠联络（这里已使用标量场的李导数的性质：$\mathscr{L}_Xf = X^a\nabla_af$）。所以沿着两个矢量场移动的不对易性应当使用李括号衡量。李括号可以用于生成新的移动方向。直观来看，系统的局部可达性（定义为对于从 $\forall x_0 \in \mathcal{S}$ 处出发的系统，存在控制律将其移动到 x_0 邻域内 N 维开集）与包含了所有用于移动系统的矢量场（例如 LTI 系统的 Ax 和 $b^{(1)}, b^{(2)}, \cdots, b^{(M)}$）的最小李代数的维度有关，这个李代数的维度为 N 是局部可达性存在的充要条件。对于 LTI 系统而言，系统的局部可达性等价于全局可达性，而全局可达性又等价于任意可控性，所以这个李代数的维度就是任意可控性的判据。考虑：

$$\begin{aligned}
[Ax, b^{(i)}] &= (Ax\cdot\nabla)b^{(i)} - (b^{(i)}\cdot\nabla)(Ax) \\
&= 0 - Ab^{(i)} = -Ab^{(i)} \\
[Ax, [Ax, b^{(i)}]] &= [Ax, -Ab^{(i)}] = (Ax\cdot\nabla)(-Ab^{(i)}) - (-Ab^{(i)}\cdot\nabla)(Ax) \\
&= 0 - (-Ab^{(i)}\cdot A) = A^2b^{(i)} \\
&\cdots
\end{aligned}$$

因此，这个李代数的维度就是 $\mathrm{rank}\{[B, AB, A^2B, \cdots A^{N-1}B]\}$，我们重新得到了之前的秩判据。

下面研究可观测性。首先需要定义状态的不可区分性：对于某一系统中的两个初始状态 x_1, x_2，在任意控制律 $u(t)$ 下，系统的输出 $y(t)$ 完全相同，则称状态 x_1, x_2 是不可区分的。定义系统的局部能观性：$\forall x_0 \in \mathcal{S}$，在其去心邻域内没有与其不可区分的状态，则称系统是局部能观的，类似地可定义全局能观。对于 LTI 系统，能观性的研究可以简化，从 x_1, x_2 出发的轨迹之差是：

$$y(t) = C\exp(At)(x_A - x_B) + \int_0^T C\exp(A(T-\tau))Bu(\tau)\mathrm{d}\tau + Du(t)$$

因此能否区分两个初始状态只与 $x_A - x_B$ 是否处在 $\forall t \in [0,T], C\exp(At)$ 的零空间中有关。考虑

$$\bar{\mathcal{O}} = \left\{ \bigcap_{t\in[0,T]} \mathrm{Ker}[C\exp(At)] \right\}$$

若 $\mathcal{O}$ 维度为 0，则 LTI 系统是全局能观的。所以 LTI 系统的能观性可直观表述成：在已知 $u(t), y(t), t \in [0,T]$ 和 A,B,C,D 的情况下，可唯一确定系统的初始状态 $x(0)$。下面我们将证明：

$$\bar{\mathcal{O}} = \bar{\mathcal{O}}_M = \mathrm{Ker}\left\{ \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \cdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \right\} \tag{1.42}$$

首先取 $v \in \bar{\mathcal{O}}$ 使得 $C\exp(At)v = 0, \forall t \in [0,T]$，可得 $Cv = 0, CAv = 0, CA^2v = 0, \cdots CA^{n-1}v = 0$，从而立刻得到 $v \in \bar{\mathcal{O}}_M$，从而 $\bar{\mathcal{O}} \subset \bar{\mathcal{O}}_M$；反过来的证明是类似的。因此，LTI 系统全局能观的条件是：

$$\mathrm{rank}\left\{ \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \cdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \right\} = N \tag{1.43}$$

怎么理解一般情况下的能观条件呢？简单起见，我们只考虑无输入系统。我们知道了一段时间 $[0,T]$ 内的轨迹，也就是知道了观测量（例如 LTI 系统中的 y）在 $t=0$ 时的各阶导数，具体来说是沿着漂移矢量场（例如 LTI 系统中的 Ax）诱导的单参微分同胚群的对观测量的各阶李导数 $\mathscr{L}_x^{(k)} y(x(t))$。通过观测映射 $y(x)$ 本身和对观测映射的 $1, \cdots, r-1$ 阶李导数，我们创建了从状态空间 $\mathcal{S}$ 到 $P \times r$ 维空间 $\mathscr{O}$（P 同上文，是观测量的数目）的映射 Φ，系统局部能观的条件是对任意 $x \in \mathcal{S}$，Φ 诱导的推前映射 $\Phi_\star : T\mathcal{S}_x \to T\mathscr{O}_{\Phi(x)}$ 是单射（直观来看，这意味着状态空间 $\mathcal{S}$ 中 x 邻域中任意方向的移动都可以在观测空间 $\mathscr{O}$ 中被捕捉到），这要求映射 Φ 的雅可比矩阵的秩为 N。非常容易看出这个条件能回退到前面 LTI 系统全局能观的条件。

上文中我们讨论了 LTI 系统的能控子空间 $\mathcal{C}$ 和不能观子空间 $\bar{\mathcal{O}}$，显然可对状态空间进行分解。所谓能控分解是选择一组合适的基底，将系统的演化方程写成如下形式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{cc} & A_{c\bar{c}} \\ 0 & A_{\bar{c}\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_c \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{1.44}$$

能做出这个分解的原因是能控子空间在 A 的作用下封闭，由哈密顿凯莱定理，这是显然的。所谓能观分解是：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_{\bar{o}} \\ x_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\bar{o}\bar{o}} & A_{\bar{o}o} \\ 0 & A_{oo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\bar{o}} \\ x_o \end{bmatrix} + Bu \quad y = \begin{bmatrix} 0 & C_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\bar{o}} \\ x_o \end{bmatrix} + D \tag{1.45}$$

能这样分解的原因是不能观子空间在 A 的作用下封闭，这也是显然的。这两个分解说明：不能控子空间会影响能控子空间，反之则不行，控制律只能影响能控子空间；能观子空间会影响不能观子空间，反之则不行，只有能观子空间中的状态演化才会被观测。

1.3.3 控制器与观测器的设计

下面介绍一些反馈控制器的设计方法。一般而言反馈控制有三种设计方法：

1. 状态反馈：引入反馈矩阵 K 和参考矢量 v，使得系统的动力学方程变成 $\dot{x} = Ax + B(v - Kx)$
2. 输出直接反馈到演化方程：引入反馈矩阵 H，使得动力学方程变成 $\dot{x} = Ax + Bu - HCx$
3. 输出反馈到控制量：引入反馈矩阵 F 和参考矢量 v，使得动力学方程变成 $\dot{x} = Ax + B(v - FCx)$

下面考察这几种反馈控制的设计方式对系统特性的影响：先证明方式 1）不改变系统的能控性：可发现 BKB 的各列是对 B 的各列做线性组合得到的，从而 $(A - BK)B$ 各列可由 $\{B, AB\}$ 各列组合得到。设 $(A - BK)^iB$ 中

的每一列可由 $\{B, AB, \cdots, A^iB\}$ 各列按如下方式组合得到：

$$(A-BK)^iB = A^iB + \sum_{j=0}^{i-1} A^jBP_{i,j}$$

其中 $P_{i,j}$ 是矩阵，则考虑：

$$\begin{aligned}(A-BK)^{i+1} &= (A-BK)(A-BK)^i \\ &= (A-BK)\left(A^iB + \sum_{j=0}^{i-1} A^jBP_{i,j}\right) \\ &= A^{i+1}B - BKA^iB + \sum_{j=1}^{i} A^jBP_{i,j} - BK\left(\sum_{j=0}^{i-1} A^jBP_{i,j}\right)\end{aligned}$$

这里第二项是 B 的各列的线性组合，第三项是 $A^jB, j = 1, \cdots i$ 的各列的线性组合，第四项是 B 的各列的线性组合，因此我们证明了 $(A-BK)^{i+1}B$ 各列可由 $\{B, AB, \cdots, A^{i+1}B\}$ 中各列线性组合得到。从而矩阵 $[B, (A-BK)B, \cdots, (A-BK)^{N-1}B]$ 可通过将矩阵 $[B, AB, \cdots, A^{N-1}B]$ 右乘一个分块上三角阵得到，这个上三角阵的对角块全部是单位阵，所以它是满秩的。所以矩阵 $[B, (A-BK)B, \cdots, (A-BK)^{N-1}B]$ 的秩和矩阵 $[B, AB, \cdots, A^{N-1}B]$ 的秩相同。再证明方式 2）不改变系统的能观性。证明是类似的：先设

$$C(A-HC)^i = CA^i + \sum_{j=0}^{i-1} P_{i,j}CA^j$$

这意味着 $C(A-HC)^i$ 的各行可按上述形式可以写成 $\{C, CA, \cdots, CA^i\}$ 中各行的线性组合。考虑：

$$\begin{aligned}C(A-HC)^{i+1} &= C(A-HC)^i(A-HC) \\ &= \left(CA^i + \sum_{j=0}^{i-1} P_{ij}CA^j\right)(A-HC) \\ &= CA^{i+1} + CA^iHC + \sum_{j=1}^{i} P_{i,j}CA^j + \left(\sum_{j=0}^{i-1} P_{i,j}CA^j\right)HC\end{aligned}$$

这里第三项是 $CA^j, j = 1, \cdots i$ 各行的线性组合，第二项和第四项是 C 的各行的线性组合。从而我们证明了 $C(A-HC)^{i+1}$ 的各行可以写成 $\{C, CA, \cdots, CA^{i+1}\}$ 中各行的线性组合, 从而新系统的能观性矩阵可通过将旧系统的能观性矩阵左乘一个上三角矩阵得到，从而两个能观性矩阵的秩相同。对于方式 3），它既是方式 1）的特例（$K = FC$），又是方式 2）的特例（$H = BF$），因此它既不改变系统的能观性，又不改变系统的能控性。

极点配置定理指出：对于状态反馈控制器 $\dot{x} = Ax + B(v - Kx)$，只要系统完全能控，则总可通过选择合适的 K 来任意移动系统极点。首先我们对 SISO 系统证明：考虑系统 $\dot{x} = Ax + Bu$，其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

取 $K = \begin{bmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & \cdots & k_{n-1} \end{bmatrix}$，从而：

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 - k_0 & -a_1 - k_1 & -a_2 - k_2 & \cdots & -a_{n-1} - k_{n-1} \end{bmatrix}$$

最下面这一行仍然是特征多项式中的系数，既然我们能任意调整特征多项式的系数，自然可以能任意指定特征

多项式的根（也就是任意移动系统极点）。接下来对 MIMO 系统证明，我们将为 MIMO 系统构造一个等效的、可控的 SISO 系统：考虑 $\dot{x} = Ax + Bu$，将 B 的列记为 $b^{(1)}, b^{(2)}, \cdots b^{(M)}$。按照顺序检查各个矢量的线性无关性：$b^{(1)}, Ab^{(1)}, A^2b^{(1)}, \cdots, A^{(N-1)}b^{(1)}$，不断地将与前面的矢量线性无关的矢量加入集合，直到找到与之前矢量线性相关的 $A^{n_1}b^{(1)}$（我们跳过它），此时集合中有 $\{b^{(1)}, Ab^{(1)}, A^2b^{(1)}, \cdots, A^{(n_1-1)}b^{(1)}\}$；继续检查下面各个矢量的线性无关性：$b^{(2)}, Ab^{(2)}, A^2b^{(2)}, \cdots, A^{(N-1)}b^{(2)}$，不断将与之前矢量线性无关的矢量加入集合，直到遇到线性相关的矢量 $A^{n_2}b^{(2)}$（仍然跳过它），此时集合中有 $\{b^{(1)}, Ab^{(1)}, \cdots, A^{(n_1-1)}b^{(1)}, b^{(2)}, Ab^{(2)}, \cdots, A^{(n_2-1)}b^{(2)}\}$，不断重复这个过程直到遍历 B 的每一列，最终集合中将包含 N 个线性无关的矢量。现在我们要考虑取矩阵 F，使得 $(A - BF)$ 不断作用在 $b^{(1)}$ 上就能生成集合中所有线性无关矢量，这可以通过指定

$$F(A^{n_i-1}b^{(i)}) = e_{i+1},$$

其余情况为 0 来实现，其中 e_{i+1} 代表仅在 $i+1$ 位置上不为 0 的单位矢量。从而我们构造了与 MIMO 系统等效的能控的 SISO 系统，可以为其任意配置极点，配置极点后的系统是：

$$\dot{x} = (A - BF - b^{(1)}\tilde{K})x + b^{(1)}v$$

其中 $\tilde{K} = \begin{bmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & \cdots & k_{n-1} \end{bmatrix}$。所以对于原来的 MIMO 系统，选择的反馈矩阵应当是 $K = F - e_1\tilde{K}$，这样就实现了极点的任意配置。

最后介绍观测器：我们有时会对系统进行“数字孪生”，这意味着我们有一个在现实世界中运行的真系统 $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$，我们将为之在计算机中创建一个副本 $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu, \hat{y} = C\hat{x}$。这里的 A, B, C 都已知。然而，两个系统的初始状态有可能设置得不一致，导致两个系统的后续演化也不同。为了消除这种不一致性，我们在系统副本中加入反馈：

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - H(\hat{y} - y) \tag{1.46}$$

这种观测器被称为龙伯格观测器。计算可知：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x - \hat{x}) = (A - HC)(x - \hat{x})$$

所以通过配置 $A - HC$ 的本征值在虚轴左侧，我们可以使真的系统与副本之间的误差逐渐缩小。