

1.2 Day 2: 跨越百年的汽笛声

“控制”的概念在蒸汽时代早已有之。当时有人（一说是改良蒸汽机的詹姆斯·瓦特，而维基百科认为这一说法是错误的）为蒸汽机设计了离心式调速器。该装置在蒸汽机的转轴上连接了两颗摆球，根据离心力和重力的力矩平衡可以知道，蒸汽机的转速越快，两颗摆球偏离垂直方向的角度越大。两颗摆球被连接到蒸汽机的阀门上，摆球的偏角被用于控制进气阀门的开闭，从而将蒸汽机的转速维持在一定范围内。这可能是世界上最早的控制装置之一。个人认为，在现代汉语的语境中，“控制”一词下面主要包含两个部分：1) 对系统的性态（例如稳定性）进行分析；2) 泛函求极值。本节中我们首先探讨**经典控制理论**，它处理的是动力系统中极小的一部分：单输入、单输出的线性时不变系统。

1.2.1 拉普拉斯变换、线性时不变系统与传递函数

之前我们说过，因为任意线性时不变系统对应了希尔伯特空间中的正规算符，我们将能找到一组基底将其对角化。因此，在频率表象中处理问题十分简便。然而，不是所有函数 $f(t)$ 均有其傅里叶变换， $\tilde{f}(\omega)$ 的存在性依赖于平方可积条件：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|f(t)\|^2 dt < \infty \quad (1.19)$$

为了解决某些信号无法进行傅里叶变换的问题，我们将引入拉普拉斯变换。考虑算符 \mathcal{S} ，它与时间算符有对易关系：

$$[T, \mathcal{S}] = -1 \quad (1.20)$$

仍考虑 \mathcal{S} 对 T 的本征矢的作用。令算符 $\mathcal{T} = 1 - \mathcal{S}\Delta t$ ，其中 $\Delta t \rightarrow 0$ ，仿照前文推导有：

$$\begin{aligned} T\mathcal{T}(\Delta t)|t\rangle &= T|t\rangle - \Delta t T\mathcal{S}|t\rangle \\ &= |t\rangle - \Delta t(T\mathcal{S} - \mathcal{S}T + \mathcal{S}T)|t\rangle \\ &= (t + \Delta t)|t\rangle - \Delta t \cdot t\mathcal{S}|t\rangle \\ &= (t + \Delta t)(1 - \mathcal{S}\Delta t)|t\rangle \\ &= (t + \Delta t)\mathcal{T}(\Delta t)|t\rangle \end{aligned} \quad (1.21)$$

所以我们这里定义的 $\mathcal{T} = 1 - \mathcal{S}\Delta t$ 也是平移算符。仍然考虑：

$$\begin{aligned} \langle t|\mathcal{T}(\Delta t)|\psi\rangle &= \langle t|\psi\rangle - \Delta t\langle t|\mathcal{S}|\psi\rangle \\ &= \langle t - \Delta t|\psi\rangle \\ &= \langle t|\psi\rangle - \frac{\partial}{\partial t}\langle t|\psi\rangle\Delta t \end{aligned}$$

从而求出：

$$\langle t|\mathcal{S}|\psi\rangle = +\frac{\partial}{\partial t}\langle t|\psi\rangle \quad (1.22)$$

现在考虑 \mathcal{S} 的本征矢量在 $|t\rangle$ 下的分解。首先，如果 A, B 两个算符均为厄米算符，则：

$$[A, B]^\dagger = (AB)^\dagger - (BA)^\dagger = BA - AB = [B, A]$$

而上面的 $[T, \mathcal{S}] = -1$ 不满足这个结论。我们已经指定了 T 是厄米算符，从而 \mathcal{S} 必然不是厄米算符，它的本征值可以是复数。考虑：

$$\langle t|\mathcal{S}|s\rangle = s\langle t|s\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\langle t|s\rangle \Rightarrow \langle t|s\rangle = \exp(st)$$

上式中， $\exp(st)$ 之前本来应当有一个未定常数，简便起见，我们将此常数设置为 1。这样我们求出了 \mathcal{S} 的右本征矢量在时间表象下的形式。注意：由于 s 是非厄米的，因此 $(|s\rangle)^\dagger$ 并不是 \mathcal{S} 的左本征矢量。左本征矢量需要重新求：

$$\langle\psi|\mathcal{S}|t\rangle = -\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi|t\rangle \Rightarrow \langle s|t\rangle s = -\frac{\partial}{\partial t}\langle s|t\rangle \Rightarrow \langle s|t\rangle = \exp(-st) \quad (1.23)$$

这里也将未定常数设置为 1。从而：

$$\langle s|\psi\rangle = \int \langle s|t\rangle \langle t|\psi\rangle = \int \exp(-st) \langle t|\psi\rangle \quad (1.24)$$

这是我们熟悉的(双边)拉普拉斯变换。一般而言,在经典控制的分析中,我们会约定时间表象下 $\langle t|\psi\rangle = 0, \forall t < 0$, 从而上面的积分可以不对 $[-\infty, +\infty]$ 进行, 而是使用所谓单边拉普拉斯变换:

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{+\infty} \exp(-st) f(t) \quad (1.25)$$

在做拉普拉斯逆变换的时候, 我们需要考虑 $|s\rangle, \langle s|$ 的完备性关系。注意 $|s\rangle$ 是一组过完备的基底, 因此在写出完备性关系的时候, 我们无需对 $s \in \mathbb{C}$ 积分, 应当注意: $\exp(-i\omega t)$ 已经是希尔伯特空间中的一组完备基底, 因此 $\exp(-i\omega t) \exp(\sigma)$ 也是一组完备基底, 这意味这完备性关系中的积分只需对复平面上平行于虚轴的一条直线进行。将积分路径记为 Γ , 设完备性关系的形式是:

$$1 = C_0 \int_{\Gamma} |s\rangle \langle s| ds$$

两侧同乘 $\langle t|t'\rangle$, 得到:

$$\begin{aligned} \langle t|t'\rangle &= C_0 \int_{\Gamma} \langle t|s\rangle \langle s|t'\rangle ds \\ &= C_0 \int_{\Gamma} \exp(st) \exp(-st) \end{aligned}$$

取 Γ 为 $\sigma - i\infty$ 到 $\sigma + i\infty$ 的直线:

$$\begin{aligned} \langle t|t'\rangle &= C_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\sigma(t-t')) \exp(i\omega(t-t')) d(i\omega) \\ &= iC_0 \exp(\sigma(t-t')) (2\pi) \delta(t-t') \\ &= iC_0 (2\pi) \delta(t-t') \end{aligned}$$

从而取 $C_0 = \frac{1}{2\pi i}$, 完备性关系:

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} |\sigma + i\omega\rangle \langle \sigma + i\omega| d(i\omega), \sigma \in \mathbb{R} \quad (1.26)$$

通过插入这个完备性关系, 可得到拉普拉斯逆变换:

$$\langle t|\psi\rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle t|\sigma + i\omega\rangle \langle \sigma + i\omega|\psi\rangle d(i\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp((\sigma + i\omega)t) \tilde{f}(\sigma + i\omega) d(i\omega) \quad (1.27)$$

下面直接给出拉普拉斯变换的常见性质, 不再证明:

线性性质: $\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\tilde{f}(s) + b\tilde{g}(s)$

微分性质: $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} \tilde{f}^{(k)}(0^-)$

积分性质: $\mathcal{L}[\int_{0^-}^t f(\tau) d\tau] = \frac{1}{s} \tilde{f}(s)$

频移性质: $\mathcal{L}[\exp(at)f(t)] = \tilde{f}(s-a)$

时移性质: $\mathcal{L}[f(t-\tau)u(t-\tau)] = \exp(-s\tau) \tilde{f}(s)$

尺度变换: $\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} \tilde{f}\left(\frac{s}{a}\right)$

卷积性质: $\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = \tilde{f}(s) \tilde{g}(s)$

我们同样可以将线性时不变系统的冲激响应的拉普拉斯变换定义为其传递函数 $G(s)$ 。若输入、输出的拉普拉斯变换分别为 $X(s), U(s)$, 则:

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} \quad (1.28)$$

在经典控制中, 我们通常需要在被控系统前面串联一个控制器, 控制器自身也是一个单输入、单输出的时不变系统, 其传递函数为 $C(s)$ 。根据控制器输入量的不同, 控制方式可被分为两类:

- 若控制器的输入与被控制系统的输出无关, 是某个人为指定的参考值, 其拉普拉斯变换为 $R(s)$, 这样的系统

被称为开环控制系统，其输出 $X(s) = R(s)C(s)G(s)$

- 若控制器的输入是参考值与被控系统输出的差 $E(s) = R(s) - X(s)$ ，这样的系统被称为闭环控制系统。系统的输出： $X(s) = (R(s) - X(s))C(s)G(s) \Rightarrow X(s) = \frac{C(s)G(s)R(s)}{1 + C(s)G(s)}$ ，因此，控制器和被控系统组成的新系统的传递函数（闭环传递函数）是 $G_{cl}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$ 。

1.2.2 一阶、二阶系统的冲激与阶跃响应

现在考虑两种最典型的线性时不变系统。首先研究一个典型的一阶系统：

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = au(t) \quad (1.29)$$

其中 $x(t)$ 是系统的状态， $u(t)$ 是输入（控制量），考虑零初始状态 ($x(0) = 0$)，两侧做拉普拉斯变换可求出传递函数：

$$sX(s) + aX(s) = aU(s) \Rightarrow G(s) = \frac{a}{s + a} \quad (1.30)$$

考虑两种最常见的输入：单位冲激函数，其拉普拉斯变换 $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ ；单位阶跃函数，其拉普拉斯变换为 $\mathcal{L}[\text{step}(t)] = \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$ 。系统的冲激响应：

$$X(s) = U(s)G(s) = 1 \cdot \frac{s}{s + a} \Rightarrow x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s + a} \right] = a \exp(-at) \quad (1.31)$$

在 $a > 0$ 时，系统的输出随时间衰减，反之 $a < 0$ 时系统要爆炸。再考虑阶跃响应：

$$X(s) = U(s)G(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{a}{s + a} = \frac{a}{s(s + a)} \Rightarrow x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s - 0} - \frac{1}{s + a} \right] = 1 - \exp(-at) \quad (1.32)$$

在 $a > 0$ 时，系统的输出趋于终值 $x(+\infty) = 1$ ， $a < 0$ 时系统爆炸。通常将 $\tau = \frac{1}{a}$ 称为系统的时间常数，该常数越小，系统的响应越快。

研究受迫的阻尼振子，一个典型的二阶系统：

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = f(t)$$

简便起见，定义系统的固有频率 $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ，阻尼比 $\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}}$ ，系统的动力学方程写成：

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dx(t)}{dt} + \omega_n^2 x(t) = \omega_n^2 u(t) \quad (1.33)$$

仍然考虑零初始状态，两侧做拉普拉斯变换给出传递函数：

$$s^2 X(s) + 2\zeta\omega_n s X(s) + \omega_n^2 X(s) = \omega_n^2 U(s) \Rightarrow G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1.34)$$

考虑其阶跃响应，也就是说我们要对

$$X(s) = G(s)U(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s}$$

做拉普拉斯逆变换。当然这里可以使用上文中给出的逆变换公式计算，但是更简单的方式是将 $X(s)$ 写成

$$\frac{A}{s - s_{p_1}} + \frac{B}{s - s_{p_2}} + \frac{C}{s - s_{p_3}}$$

的形式，然后直接查表。为此，解出 $X(s)$ 的三个极点，即 $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ 的三个零点是：

$$s_{p_1} = 0, s_{p_2} = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}i, s_{p_3} = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}i \quad (1.35)$$

此时比较两侧分子可求出 A, B, C ，之后可直接查表求出 $x(t)$ 。一个有趣的观察是随着阻尼比 ζ 的增大，系统的阶跃响应发生什么变化。在 $\zeta \in [0, 1)$ 时， s_{p_2}, s_{p_3} 的虚部均不为 0，此时 $B \exp(s_{p_2}t) + C \exp(s_{p_3}t)$ 必然由于这个虚部的存在而震荡，这一阶段称为欠阻尼；在 $\zeta = 1$ 时， s_{p_2}, s_{p_3} 的虚部消失，此时系统将无震荡地走向平衡点，称为临界阻尼；在 $\zeta > 1$ 时， $s_{p_2} = -(\zeta + \sqrt{\zeta^2 + 1})\omega_n$ ， $s_{p_3} = -(\zeta - \sqrt{\zeta^2 + 1})\omega_n$ ，随着 ζ 继续增大， s_{p_2} 逐渐向实轴左侧无穷远处移动，而 s_{p_3} 逐渐向 0 移动。此时系统收敛到平衡点的速度是被 s_{p_3} 控制的，因此随着阻尼的

增大, 收敛速度反而越来越慢了。这解释了为什么在临界阻尼时, 二阶系统将会最快回到平衡点。在工程上, 我们也会关注二阶系统的一些重要性能指标, 如输入为单位阶跃函数时, $x(t)$ 第一次达到 1 的时间 (上升时间 T_r , 仅在欠阻尼情形下可被定义); 系统输出的最大值与 1 的差 (最大超调量 M_p , 仅在欠阻尼情形下可被定义); 系统输出进入 $[0.98, 1.02]$ 内的时间 (稳定时间 T_s)。

1.2.3 传递函数与系统稳定性的关系、比例控制器和积分控制器

在讨论稳定性之前, 需要先给平衡点的稳定性一个定义。考虑一个无输入 (不受控) 的线性时不变系统, 称 x_f 是系统的平衡点, 若 $x(t_0) = x_f \Rightarrow x(t) = x_f, \forall t \geq t_0$ 。由于我总可以任意平移系统的状态, 简便起见, 下文的分析中均设系统的平衡点位于 $x_f = 0$ 处。对于稳定性有两种定义:

- 若平衡点 $x_f = 0$ 满足 $\forall t_0, \forall \epsilon > 0, \exists \delta(t_0, \epsilon) > 0$, 使得 $\|x(t_0)\| < \delta(t_0, \epsilon)$ 则 $\forall t \geq t_0, \|x(t)\| < \epsilon$, 此平衡点被称为是李雅普诺夫稳定的。直观上, 李雅普诺夫稳定性意味着: 如果在任意时刻 t_0 系统进入了平衡点的 δ 邻域内, 则此后系统将永远被限制在平衡点的 ϵ 邻域内。
- 在李雅普诺夫稳定的基础上, 如果平衡点还满足: $\forall t_0, \exists \delta(t_0) > 0$, 使得 $\|x(t_0)\| < \delta(t_0)$ 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$, 则称该平衡点是渐近稳定的。直观上, 渐近稳定性意味着如果在任意时刻 t_0 系统进入了平衡点的 δ 邻域内, 则系统将最终停在平衡点上。

从上面一阶、二阶系统的分析中可以发现, 系统输出 $X(s)$ 的极点位置将直接决定系统的稳定性。为了给出无输入 (不受控) 系统的稳定性, 我们可以直接研究系统传递函数 (或者说系统的冲激响应) 的极点位置。先说这是为什么: 考虑非零初始状态的系统:

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) + c_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}x(t) + \dots + c_1\frac{d}{dt}x(t) + c_0x(t) = u(t)$$

记特征多项式 $D(s) = s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \dots + c_1s + c_0$, 系统输出的拉普拉斯变换:

$$X(s) = \frac{U(s)}{D(s)} + \frac{\#}{D(s)}$$

其中 $\#$ 是由于非零初始状态引入的常数。在 $U(s) = 1$ 时, 零初始状态, 但有冲激函数输入的响应 $\frac{U(s)}{D(s)}$ 和非零初始状态, 但无输入的响应 $\frac{\#}{D(s)}$ 有相同的极点。所以我们只需分析系统冲激响应/传递函数的极点即可。显然我们会将系统的传递函数做分式分解:

$$G(s) = \frac{N(s)}{(s-s_{p1})(s-s_{p2})\dots(s-s_{pn})} = \frac{C_{p1}}{(s-s_{p1})} + \frac{C_{p2}}{(s-s_{p2})} + \dots + \frac{C_{pn}}{(s-s_{pn})} \quad (1.36)$$

它的拉普拉斯逆变换是 $\sum_{i=1}^n C_{pi} \exp(s_i \cdot t)$, 显然, 只有当**系统传递函数的所有极点在虚轴左侧**时, 系统在冲激响应下有 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, 此时的无输入 (不受控) 系统是渐近稳定的。

现在我们知道, 系统的极点位置直接影响系统的稳定性和各项性能指标, 那么现在要做的就是通过在系统前面串联一个控制器来改变整个系统 (控制器与被控系统) 的传递函数, 从而使各项性能指标落到我们满意的范围内。在设计控制器之前, 我们先介绍拉普拉斯变换的终值定理, 即若 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ 存在, 则有:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\tilde{f}(s) \quad (1.37)$$

这个性质可以使用拉普拉斯变换的微分性质证明:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^{\infty} \exp(-st)f(t)dt = s\tilde{f}(s) - f(0)$$

在两侧令 $s \rightarrow 0$, 交换积分与极限的顺序就得到:

$$f(\infty) - f(0) = \lim_{s \rightarrow 0} s\tilde{f}(s) - f(0) \Rightarrow f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s\tilde{f}(s)$$

先来考虑最简单的一种控制器: 直接将参考值 $R(s)$ 与输出值 $X(s)$ 之差乘以常数 K_P 作为被控系统的输入, 这种控制称为比例控制。研究参考值为常数, 即 $r(t) = r, R(s) = \frac{r}{s}$ 的情形, 系统的输出:

$$X(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}R(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \frac{r}{s}$$

误差:

$$E(s) = R(s) - X(s) = \frac{r}{s} \left(\frac{1}{1 + C(s)G(s)} \right)$$

利用终值定理, 并取 $C(s) = K_p$:

$$e(+\infty) = r \left(\frac{1}{1 + C(s)G(s)} \right) = r \left(\frac{1}{1 + K_p G(s)} \right)$$

这是在时间无穷长时, 参考值和系统输出间的误差, 也就是所谓的稳态误差。上文中已分析过, n 阶系统的传递函数通常有 $G(s) = \frac{1}{D(s)}$, $D(s) = s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \dots + c_1s + c_0$, 从而 $G(0) = \frac{1}{c_0}$ 。这意味着除非 $c_0 \rightarrow 0$, 否则系统的稳态误差必然存在, 这是比例控制器的固有缺陷之一。为了消除这个稳态误差, 我们显然应当改变控制器的传递函数, 使 $\lim_{s \rightarrow 0} C(s) \rightarrow \infty$, 一个自然的想法是令 $C(s) = \frac{K_I}{s}$ 。此时 $U(s) = C(s)E(s) = \frac{K_I}{s}E(s)$, 换言之, 被控系统的输入 $u(t) = K_I \int_0^t e(\tau) d\tau$, 因此这种控制器相当于向被控系统输入了累积的误差, 被称为积分控制器。使用积分控制器后, 系统的传函多出来一个 $\frac{1}{s}$, 或者说系统的特征多项式被乘了 s , 所以系统实际上升了一阶。以上两种控制器可以结合使用, 就得到比例-积分控制器。

1.2.4 根轨迹和伯德图

本小节介绍两种常见的图解法。根轨迹指的是随系统参数变化, 闭环传递函数极点 (也就是特征方程 $D(s) = 0$ 的根) 在复平面上的移动轨迹。根轨迹可帮助我们调整控制器的参数 (例如, 我们往往希望所有极点中离虚轴最近的那个离开虚轴的距离尽可能远, 从而使系统收敛更快)。使用 `matlab` 或 `python` 中的 `control` 库可直接绘制根轨迹, 下文中仅列出手绘根轨迹的规则, 不做证明。

手绘根轨迹时, 简便起见, 我们总是把变化的参数 K 视作比例控制器的增益。换言之, 系统的闭环传函必须被改写成 $G_{cl}(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}$ 的形式, 这里的 $G(s)$ 不一定是被控系统的传函, 只是一个通过 $\frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \text{原传函}$ 解出来的等效传函。假设 $G(s)$ 有 m 个零点, n 个极点, 可被写成以下形式:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{(s - s_{z_1})(s - s_{z_2}) \cdots (s - s_{z_m})}{(s - s_{p_1})(s - s_{p_2}) \cdots (s - s_{p_n})}$$

可使用以下规则来粗略地绘制根轨迹:

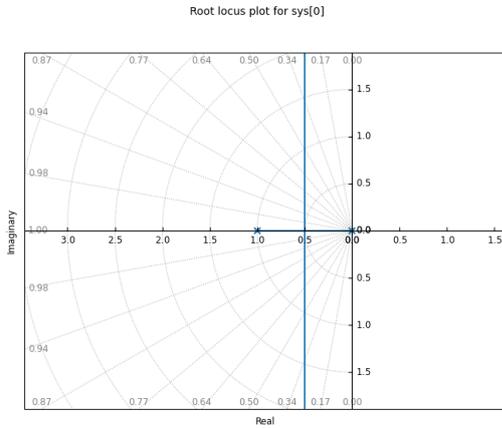
- 根轨迹在复平面上有 $\min\{m, n\}$ 条分支;
- 若 $n = m$, 则随着 K 从 0 向 $+\infty$ 移动, 根轨迹总是从 $G(s)$ 的极点向零点移动;
- 若 $n > m$, 则有 $(n - m)$ 条分支从极点指向无穷; 若 $n < m$, 则有 $(m - n)$ 条分支从无穷指向极点;
- 实轴上, 根轨迹在从右向左数第奇数个极点或零点的左侧出现;
- 共轭复根成对出现, 从而根轨迹关于实轴对称;
- 从无穷远处来或向无穷远处去的根轨迹将沿着渐近线移动。渐近线与实轴的交点为 $\frac{\sum s_{p_n} - \sum s_{z_m}}{n - m}$, 与实轴的夹角

$$\theta = \frac{2q + 1}{n - m} \pi, \quad q = \begin{cases} 0, 1, \dots, n - m - 1 & n > m \\ 0, 1, \dots, m - n - 1 & n < m \end{cases}$$

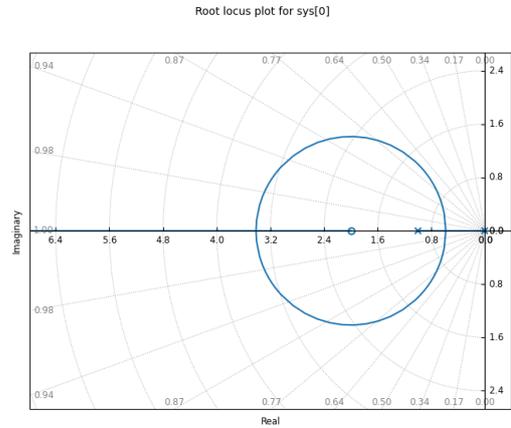
此外, 若点 s 在根轨迹上, 应满足 $\exists K, KG(s) = -1$, 换言之, 需要 $\|KG(s)\| = 1$, $\arg KG(s) = -(2q + 1)\pi, q = \pm 0, \pm 1, \dots$ 。显然, 无论 $\|G(s)\|$ 为何值, 总可找到 K 使得 $\|KG(s)\| = 1$ 成立。因此只需根据是否有 $\arg G(s) = -(2q + 1)\pi, q = \pm 0, \pm 1, \dots$ 即可判断点 s 是否在根轨迹上。

下面介绍几种利用根轨迹来直观设计的控制器。考虑简单的二阶系统 $G(s) = \frac{1}{(s + 1)s}$, 该系统的两支根轨迹分别从 $s = 0, s = 1$ 出发, 分别向左、向右移动, 在 $s = -\frac{1}{2}$ 处相遇, 此后沿着虚轴向上/向下移动到无穷远。因此, 系统最快的收敛速度是 $\exp\left(-\frac{1}{2}t\right)$ 。为了让系统收敛更快, 我们需要将根轨迹引向左半平面离虚轴更远处。利用根轨迹从极点出发指向零点的性质, 可以在左半平面深处放置一个零点, 例如在系统前串联 $C(s) = K_D s + K_P$, 此时出现了新的零点 $s_{z_1} = \frac{K_P}{K_D}$, 从而随着 K 的增加, 闭环传函 $\frac{C(s)G(s)}{1 + KC(s)G(s)}$ 的极点将继续向左移动。由于

此时被控系统的输入是 $u(t) = K_D e'(t) + K_P e(t)$ ，因此这种控制器被称为比例-微分控制器。至此，我们集齐了所谓 PID（比例-积分-微分）控制器三幻神：比例-微分控制器负责创建新的闭环传函零点，可以将根轨迹移向左侧来加速收敛；积分控制器负责消除稳态误差。



(a) 二阶系统 $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ 的根轨迹

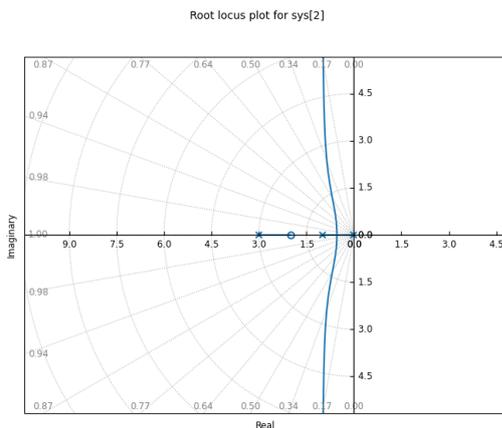


(b) 使用了比例-微分控制器 $C(s) = s + 2$ 的二阶系统的根轨迹

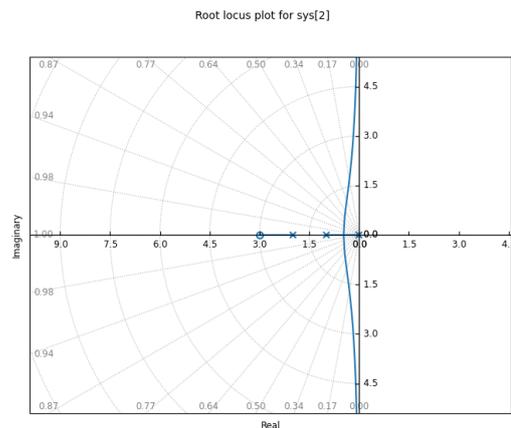
还有其他的将根轨迹尽可能左移的方法，例如所谓超前补偿器 $C(s) = \frac{s - s_{zc}}{s - s_{pc}}$ ，且 $s_{pc} < s_{zc} < 0$ 。这为系统引入了一个新的极点和一个新的零点，且新极点在新零点的左侧。此时的根轨迹有三条：一条从新极点指向新零点，另外的两条是仍然从原有的两个极点出发，沿着平行于虚轴的渐近线走向无穷远。但是此时的渐近线向左移动了，这就使得系统的收敛速度更快了。我们检查这种控制器对稳态误差造成了何种影响。容易求出系统的误差 $E(s) = \frac{R(s)}{1 + KC(s)G(s)}$ ，考虑单位阶跃输入 $R(s) = \frac{1}{s}$ ，由终值定理得到系统的稳态误差：

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{s - s_{zc}}{s - s_{pc}} K \frac{N(s)}{D(s)}} = \frac{D(0)}{D(0) + KN(0) \frac{s_{zc}}{s_{pc}}}$$

所以只使用形如 $C(s) = \frac{s - s_{zc}}{s - s_{pc}}$ 的控制器必然会引入稳态误差。 $\frac{s_{zc}}{s_{pc}}$ 越大，稳态误差越小。但是在 $s_{zc} < s_{pc} < 0$ 时，根轨迹的渐近线就要向右移动，系统的收敛速度反而变慢了。这种控制器称为滞后补偿器。



(a) 使用了超前补偿 $C(s) = \frac{s+2}{s+3}$ 的二阶系统的根轨迹

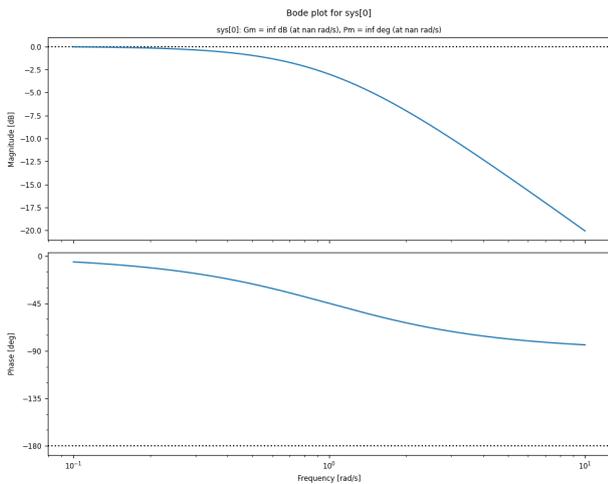


(b) 使用了滞后补偿 $C(s) = \frac{s+3}{s+2}$ 的二阶系统的根轨迹

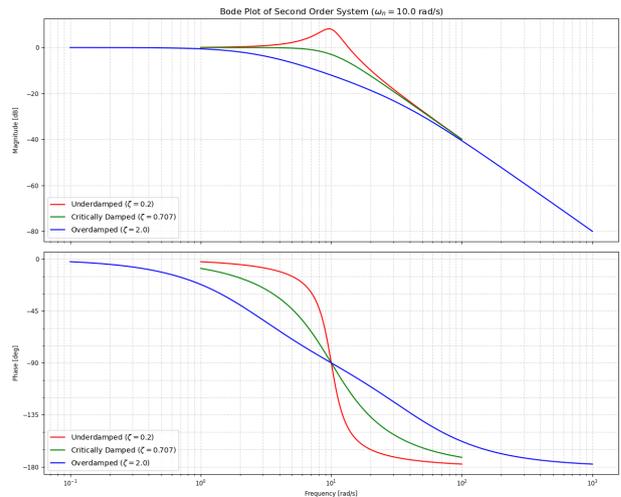
下面只考虑绝对可积信号。在傅里叶变换的章节中我们已经知道，频率为 ω 的信号 $\exp(i\omega t)$ 通过传函为 $G(s)$ 的线性时不变系统后，振幅变化 $\|G(i\omega_i)\|$ 倍，相位移动 $\arg G(i\omega_i)$ 。一些典型的例子包括：

- 一阶系统 $G(s) = \frac{a}{s+a}$, $\|G(s)\| = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\omega_i}{a}\right)^2 + 1}}$, $\arg G(i\omega_i) = -\arctan \frac{\omega_i}{a}$, 可以认为这是一个低通滤波器。
- 二阶系统 $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$, $\|G(i\omega_i)\| = \sqrt{\frac{1}{(1-\Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2}}$, $\arg G(i\omega_i) = -\arctan \frac{2\zeta\Omega}{1-\Omega^2}$, $\Omega = \frac{\omega_i}{\omega_n}$ 。对于二阶系统而言, 随着输入频率 ω_i 的增大, $\|G(i\omega_i)\|$ 先增大后减小。在 ω_i 和 ω_n 接近时, $\|G(i\omega_i)\|$ 较大。

伯德图是 $\|G(i\omega_i)\|$ 和 $\arg G(i\omega_i)$ 的可视化。 $\|G(i\omega_i)\|$ 的纵轴计算方法是 $20 \log \|G(i\omega_i)\|$, 其实是输出振幅与输入振幅之比取对数再乘以 20, 单位是分贝。使用对数坐标使得串联系统的伯德图可以直接叠加, 使用系数 20 是因为能量正比于振幅的平方。最后我们给出一些典型系统的伯德图。



(a) 一阶系统 $\frac{1}{s+1}$ 的伯德图



(b) 二阶系统的伯德图