第 1 章 日常篇

1.1 Day 1：将时光凝聚成音符

1.1.1 傅里叶变换，时间表象与频率表象

众所周知，对于现实世界中的一个质点，我们可以使用 $\mathbb{R}^3$ 中的矢量表示其位置；对刚体的转动操作是 $SO(3)$ 群的群元，$SO(3)$ 群的最小维度的非平凡的不可约表示（定义表示）也将 $SO(3)$ 的任意群元表示为 $\mathbb{R}^3$ 中的矢量。信号是否能用矢量表示呢？考虑最贴近我们的生活的两种情况：1）信号可以是有限个像素的图像，这时你只需要 `torch.flatten(img)` 就把它变成矢量了；2）信号可以是在时间上延展的音频，此时，时间 t 起到了和向量下标 i 相同的作用，直观上可以说音频信号是"无穷维"的矢量。形式化地，在本文中，信号被视为希尔伯特空间中的矢量。要聊希尔伯特空间，要从复内积空间开始聊起。

在一个线性空间中装备内积，该线性空间就变成内积空间。在复内积空间中的内积必须满足性质：

- （共轭）对称性：$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \overline{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle}$
- 对第二个槽位的线性性：$\langle \boldsymbol{z}, \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}\rangle = \alpha\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}\rangle + \beta\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}\rangle$
- 正定性：$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle \geq 0$，且 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$。

在复内积空间的基础上，若空间中的任何柯西列都收敛到该空间中的某一点（或者直观来说，该空间没有被挖一个洞），则称该空间是希尔伯特空间。

希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 到自身的线性映射被称为 $\mathcal{H}$ 上的线性算符。对于线性算符 O，可定义其伴随算符 $O^\dagger$：

$$\langle \boldsymbol{x}, O\boldsymbol{y}\rangle = \langle O^\dagger \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle \tag{1.1}$$

若算符 O 的伴随算符等于自身，即 $O = O^\dagger$，则称 O 是自伴的或厄米的。厄米算符有**实本征值**，且**对应不同本征值的本征矢量互相正交**。我们来证明这一性质。

首先证明其本征值是实数，设 $\boldsymbol{v}$ 是 O 的对应本征值 λ 的本征矢量。由于 O 厄米，从而 $\langle \boldsymbol{v}, O\boldsymbol{v}\rangle = \langle O\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle$，从而：

$$\langle \boldsymbol{v}, \lambda\boldsymbol{v}\rangle = \langle \lambda\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle \Rightarrow \lambda^\star\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = \lambda\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle$$

立刻发现 λ 是实数。下面证明本征矢量的正交性质。继续设 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 是 O 的对应本征值 λ_1 和 λ_2 的本征矢量，从而 $\langle \boldsymbol{v}_1, O\boldsymbol{v}_2\rangle = \langle O\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle$，进一步地：

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \lambda_2\boldsymbol{v}_2\rangle = \langle \lambda_1\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle \Rightarrow \lambda_2\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle = \lambda_1\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle$$

注意这里我们已经使用了本征值为实数的性质。由于 λ_1, λ_2 不等，从而 $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle = 0$，这就完成了证明。

此外，我们还会使用一个性质，即所谓谱定理。称一个算符 O 是正规算符，若 $O^\dagger O = OO^\dagger$。谱定理指出有限维复矢量空间上的正规算符均可被对角化。这意味着 N 维复矢量空间上的正规算符有 N 个线性无关的本征矢量，这些本征矢量可以作为该复矢量空间的一组基底。不加证明地，我们直接将谱定理推广到无穷维复矢量空间中。

显然，一般的两个线性映射（两个矩阵）的复合（乘法）不会满足交换律，希尔伯特空间中的算符亦然。定义算符的对易子：

$$[A, B] = AB - BA \tag{1.2}$$

若两个算符的对易子不为 0，则它们是不满足交换律的。下面我们的讨论将围绕一对特殊的算符展开。考虑无穷维的希尔伯特空间，设我们有时间算符 T 和频率算符 Ω，它们均为厄米算符，且它们之间的对易子为：

$$[T, \Omega] = i \tag{1.3}$$

根据上文中提到的谱定理，既然 T, Ω 都是无穷维希尔伯特空间中的厄米算符，则它们应当有无穷多本征矢量，这些本征矢量构成希尔伯特空间的完备基底。对于空间中任何一个矢量，它既可以由 T 的本征矢量线性表出，又可用 Ω 的本征矢量线性表出。下面我们研究这两种线性表出的方式中，基底前面的系数有什么关系。下文中我们将使用符号 $|\psi\rangle$ 代表希尔伯特空间中的矢量，使用 $\langle\psi|$ 代表 $|\psi\rangle$ 的对偶矢量。内积 $\langle |\phi\rangle, |\psi\rangle\rangle$ 可以视作 $|\phi\rangle$ 的对偶矢量 $\langle\phi|$ 作用在 $|\psi\rangle$ 上的结果，因此记作 $\langle\phi|\psi\rangle$。$\langle |\phi\rangle, A|\psi\rangle\rangle$ 被记作 $\langle\phi|A|\psi\rangle$。

我们来考虑位置算符 Ω 对时间算符 T 的本征矢的作用。将时间算符 T 的本征值为 t 的本征矢记为 $|t\rangle$，我们约定 $|t\rangle$ 满足正交归一关系，即：

$$\langle t|t'\rangle = \delta(t-t') \tag{1.4}$$

考虑算符 $\mathcal{T}(\Delta t) = 1 - i\Omega\Delta t$，其中 $\Delta t \to 0$。将其作用在 $|t\rangle$ 上：

$$\begin{aligned} T\mathcal{T}(\Delta t)|t\rangle &= T|t\rangle - i\Delta t T\Omega|t\rangle \\ &= t|t\rangle - i\Delta t(T\Omega - \Omega T + \Omega T)|t\rangle \\ &= (t+\Delta t)|t\rangle - i\Delta t \cdot t\,\Omega|t\rangle \\ &\approx (t+\Delta t)(1 - i\Omega\Delta t)|t\rangle \\ &= (t+\Delta t)\mathcal{T}(\Delta t)|t\rangle \end{aligned} \tag{1.5}$$

在上面的推导中，我们已经忽略了二阶小量。可以看出，$\mathcal{T}|t\rangle$ 依然是 T 的本征矢，只不过其对应的本征值是 $t+\Delta t$，从而我们可以说算符 $\mathcal{T}(\Delta t)$ 是（无穷小）时间平移算符，它对 T 的本征矢起到了平移作用。有限长时间的平移算符可以通过无穷小时间的平移算符作用无穷多次来得到，不难看出，有限长时间平移算符的形式是：

$$\mathcal{T}(t) = \exp(-i\Omega t) \tag{1.6}$$

直观上，我们可以说，有限长时间平移算符是由频率算符 Ω "生成" 的，所以说频率算符是时间平移算符的 "生成元"。不难发现 $\mathcal{T}$ 满足性质 $\mathcal{T}^\dagger\mathcal{T} = 1$，我们将满足这个性质的算符称为幺正算符。(更严格地，我们是在说时间平移算符是时间平移群在希尔伯特空间中的幺正表示，频率算符是其单位元处切空间内的一个元素。)

下面考虑 $\langle t|\mathcal{T}(\Delta t)|\psi\rangle$，$|\psi\rangle$ 是任意矢量，$\Delta t \to 0$。利用 $\langle t|\mathcal{T}(\Delta t) = (\mathcal{T}(-\Delta t)|t\rangle)^\dagger = \langle t-\Delta t|$：

$$\begin{aligned} \langle t|\mathcal{T}(\Delta t)|\psi\rangle &= \langle t|\psi\rangle - i\Delta t\langle t|\Omega|\psi\rangle \\ &= \langle t-\Delta t|\psi\rangle \\ &= \langle t|\psi\rangle - \frac{\partial}{\partial t}\langle t|\psi\rangle\Delta t \end{aligned}$$

从而立刻得到：

$$\langle t|\Omega|\psi\rangle = -i\frac{\partial}{\partial t}\langle t|\psi\rangle \tag{1.7}$$

注意：在一些教科书上，你可能看到这样的记法：$\Omega = -i\dfrac{\partial}{\partial t}$，但显然这种做法只是上式的简记（或者说是在逗你玩），因为右边这个东西根本不是希尔伯特空间中的算符。个人认为更好的写法应该是 $\Omega = -i\int|\tau\rangle\langle\tau|\dfrac{\partial}{\partial\tau}\mathrm{d}\tau$，或者采用 @ 东云正树的记法 $\langle t|\Omega = -i\dfrac{\partial}{\partial t}$。

在研究最终问题之前（如何使用 T 和 Ω 的本征矢来展开一个矢量），还需做一个准备，我们求出 $\langle t|\omega\rangle$，其中 $|\omega\rangle$ 是 Ω 的本征值为 ω 的本征矢，同样满足与 $|t\rangle$ 类似的正交关系，但是多了个系数：

$$\langle\omega|\omega'\rangle = (2\pi)\delta(\omega-\omega') \tag{1.8}$$

直接利用上文中推导出的结论：

$$\langle t|\Omega|\omega\rangle = \omega\langle t|\omega\rangle = -i\frac{\partial}{\partial t}\langle t|\omega\rangle$$

该微分方程的解是：

$$\langle t|\omega\rangle = C_0\exp(i\omega t) \tag{1.9}$$

利用前面约定过的，$|t\rangle, |\omega\rangle$ 的正交归一关系，以及 $\delta(\cdot)$ 的积分表示：

$$\int \mathrm{d}t\langle\omega'|t\rangle\langle t|\omega\rangle = (2\pi)\delta(\omega-\omega') \quad \delta(k) = \frac{1}{2\pi}\int\exp(ikx)\mathrm{d}x$$

推出系数 $C_0 = 1$。从而：

$$\langle\omega|\psi\rangle = \int\mathrm{d}t\langle\omega|t\rangle\langle t|\psi\rangle = \int\mathrm{d}t\exp(-i\omega t)\langle t|\psi\rangle \tag{1.10}$$

其中已利用了 $|t\rangle$ 的完备性关系 $\int \mathrm{d}t|t\rangle\langle t| = 1$。利用 $|\omega\rangle$ 的完备性关系 $\int \mathrm{d}\omega|\omega\rangle\langle\omega| = 2\pi$ 立刻得到：

$$\langle t|\psi\rangle = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\omega\langle t|\omega\rangle\langle\omega|\psi\rangle = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\omega\exp(+i\omega t)\langle\omega|\psi\rangle \tag{1.11}$$

这样，我们就导出了任意矢量 $|\psi\rangle$ 在 $|t\rangle, |\omega\rangle$ 两组基底上展开系数的关系。上面这两个式子正是我们熟知的傅里叶变换。$\langle t|\psi\rangle$ 是我们通常说的时域中的信号 $f(t)$，而 $\langle\omega|\psi\rangle$ 则是频域中的信号 $f(\omega)$，它们其实只是希尔伯特空间中的同一个矢量在两组正交基上的投影。当我们在时域中处理问题时，我们总是把代表信号的矢量投影到 $|t\rangle$ 这组基底上，我们说我们是在**时间表象**（Representation）中处理问题，相似地，在频域中处理问题时，我们总是把信号投影到 $|\omega\rangle$ 这组基底上，我们说我们是在**频率表象**中处理问题。

1.1.2 傅里叶变换的性质、线性时不变系统

下面介绍傅里叶变换的重要性质，先从简单的开始。简便起见，时间表象中的信号被记作 $f(t)$，而频率表象中的信号被记作 $\tilde{f}(\omega)$：

线性性：$\mathcal{F}[af_1(t) + bf_2(t)] = a\tilde{f}_1(\omega) + b\tilde{f}_2(\omega)$ 被变换到，由于信号是希尔伯特空间中矢量，显然成立。

时移性质：$\mathcal{F}[f(t-t_0)] = \tilde{f}(\omega)\exp(-i\omega t_0)$。利用时间平移算符的定义容易证明。

频移性质：$\mathcal{F}[\exp(i\omega_0)f(t)] = \tilde{f}(\omega-\omega_0)$。$\Omega$ 是时间平移的生成元，T 是频移生成元。

尺度变换：$\mathcal{F}[f(at)] = \dfrac{1}{|a|}\tilde{f}\left(\dfrac{a}{\omega}\right)$。

两次傅里叶变换：$f(t)$ 两次正变换得到 $2\pi f(-t)$。做完第一次变换后，将反变换中 t 换成 $-t$ 即可看出这个结果。

时域微分：求导一次多一个 $i\omega$，即 $\mathcal{F}\left[\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\right] = (i\omega)^n\tilde{f}(\omega)$，证明：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\exp(-i\omega t)\mathrm{d}t &= [f(t)\exp(-i\omega t)]_{-\infty}^{+\infty} - (-i\omega)\int\exp(-i\omega t)f(t)\mathrm{d}t \\ &= 0 + i\omega\int\exp(-\omega t)f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

频域微分：$\mathcal{F}[(-it)f(t)] = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\tilde{f}(\omega)$，证明：正变换两侧对 ω 求导：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\tilde{f}(\omega) = \int f(t)(-it)\exp(-i\omega t)\mathrm{d}t$$

傅里叶变换有一系列重要性质是所谓卷积性质。但是在研究卷积性质之前，我们先介绍卷积这个操作是怎么来的，这需要研究线性时不变系统。线性时不变系统显然是吃掉一个信号，吐出另一个信号的东西，因此它也是希尔伯特空间中的线性算符。直观起见，我们在时间表象中叙述其性质。称线性算符 T 是线性时不变（Linear Time-Invariance）系统，若它除了线性性（废话）之外还满足性质（时不变性）：

$$T[x(t)] = y(t) \Rightarrow T[x(t-t_0)] = y(t-t_0) \tag{1.12}$$

这个性质使我们可以方便地求出其输出。定义 LTI 系统输入 $\delta(\cdot)$ 函数后的输出为冲激响应 $h(t) = T[\delta(t)]$。对于任意输入信号，它在 t 时刻的值可以利用 $\delta(\cdot)$ 筛选出来：$x(t) = \int \mathrm{d}\tau x(\tau)\delta(t-\tau)$，利用 LTI 系统的两个性质：

$$y(t) = T[x(t)] = \int \mathrm{d}\tau x(\tau)h(t-\tau) \tag{1.13}$$

因此，LTI 系统的输出是输入信号和冲激响应的卷积，直观上，这意味着 $\tau + \Delta\tau$ 时间内的输入 $x(\tau)\Delta\tau$ 可以被冲

激函数 $\delta(t-\tau)x(\tau)\Delta\tau$ 替代，然后所有的输入叠加。下面证明傅里叶变换的卷积性质：$\mathcal{F}[x(t)*h(t)]=\tilde{f}(\omega)\tilde{h}(\omega)$

$$\begin{aligned}\tilde{y}(\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau\exp(-i\omega t)\mathrm{d}t\\&=\int x(\tau)\int h(t-\tau)\exp(-i\omega t)\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau\\&=\int x(\tau)\int h(u)\exp(-i\omega(u+\tau))\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau\\&=\int x(\tau)\exp(-i\omega\tau)\tilde{h}(\omega)\mathrm{d}\tau\\&=\tilde{x}(\omega)\tilde{h}(\omega)\end{aligned}$$

也就是说，时间表象上两个信号的卷积，傅里叶变换后得到频率表象上两个信号的相乘。这个结果也说明频率表象中，LTI 系统的输入和输出有关系：

$$\tilde{h}(\omega)=\frac{\tilde{y}(\omega)}{\tilde{x}(\omega)}\tag{1.14}$$

这里的 $\tilde{h}(\omega)$ 就是之前介绍的时间表象上冲激响应的傅里叶变换，又被称为传递函数（在后面介绍的自动控制原理中，我们将利用拉普拉斯变换再定义一次传递函数）。这个写法其实意味着代表任意线性时不变系统的算符 T 是可以使用 $|\omega\rangle$ 这组基底对角化的，也就是 $T|\omega\rangle=\tilde{h}(\omega)|\omega\rangle$，因此，任意线性时不变系统是希尔伯特空间中的正规算符（$\tilde{h}(\omega)$ 显然不一定是实数）。

此外，考虑

$$\int\langle\psi|t\rangle\langle t|\psi\rangle\mathrm{d}t=\langle\psi|\psi\rangle\quad\frac{1}{2\pi}\int\langle\psi|\omega\rangle\langle\omega|\psi\rangle=\langle\psi|\psi\rangle$$

立刻得到所谓帕塞瓦尔等式：

$$\int\|\psi(t)\|^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int\|\psi(\omega)\|^2\mathrm{d}\omega\tag{1.15}$$

此外，傅里叶变换有重要性质：信号的时间表象 $f(t)$ 和频率表象 $\tilde{f}(\omega)$ 不能被同时确定。为了说明这一点，我们先证明更一般的不确定性关系。设有信号 $|\psi\rangle$ 模长为 1，以及给定任意两个厄米算符 A,B，考虑表达式：

$$\begin{aligned}\langle\psi|A|\psi\rangle&=\int\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\alpha'\langle\psi|\alpha\rangle\langle\alpha|A|\alpha'\rangle\langle\alpha'|\psi\rangle\\&=\int\alpha\psi^2(\alpha)\mathrm{d}\alpha\end{aligned}$$

这里的 $|\alpha\rangle$ 是 A 的正交归一本征矢。换言之，若将 $\psi^2(\alpha)$ 视作概率密度（这意味着我使用了一个概率诠释：A,B 是（信号的）某种可观测量，每次进行观测时，有 $\|\langle\alpha|\psi\rangle\|^2$ 的概率得到 α 这个结果），则上式是期望的形式。引入新的算符：

$$\Delta A=A-\langle\psi|A|\psi\rangle I\quad\Delta B=B-\langle\psi|B|\psi\rangle$$

立刻看出：

$$\langle\psi|(\Delta A)^2|\psi\rangle=\langle\psi|A^2|\psi\rangle-(\langle\psi|A|\psi\rangle)^2$$

回忆对于随机变量 X，有 $\mathrm{Var}[X]=\mathbb{E}[X^2]-(\mathbb{E}[X])^2$，上面这个式子可理解为“$\alpha$ 的方差”。考虑：

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[\alpha]\mathrm{Var}[\beta]&=\langle\psi|(\Delta A)^2|\psi\rangle\langle\psi|(\Delta B)^2|\psi\rangle\\&=\langle\psi|(\Delta A)^\dagger(\Delta A)|\psi\rangle\langle\psi|(\Delta B)^\dagger(\Delta B)|\psi\rangle\\&=\langle f|f\rangle\langle g|g\rangle\quad|f\rangle=\Delta A|\psi\rangle,|g\rangle=\Delta B|\psi\rangle\\&\geq(\langle f|g\rangle)^2\end{aligned}$$

最后一步使用了柯西-施瓦茨不等式。而 $\langle f|g\rangle=\langle\psi|\Delta A\Delta B|\psi\rangle$，而：

$$\Delta A\Delta B=\frac{1}{2}\{\Delta A,\Delta B\}+\frac{1}{2}[\Delta A,\Delta B],\quad\{\Delta A,\Delta B\}=\Delta A\Delta B+\Delta B\Delta A$$

类比 $\|x+iy\|^2 \geq y^2$，我可以把 $\{\cdot,\cdot\}$ 的部分扔掉：

$$\mathrm{Var}[\alpha]\mathrm{Var}[\beta] \geq \frac{1}{4}(\langle\psi|[\Delta A,\Delta B]|\psi\rangle)^2 = \frac{1}{4}(\langle\psi|[A,B]|\psi\rangle)^2 \tag{1.16}$$

这是一般的不确定性关系，两个“方差”的乘积由两个算符的对易子决定。两个不对易的“可观测量”，例如本文中的时间和频率将不能同时被精确地确定。现在令 $A=T, B=\Omega$，上式变成：

$$\mathrm{Var}[t]\mathrm{Var}[\omega] \geq \frac{1}{4}$$

或者显式地写出这个结果：

$$\left(\int \|\psi(t)\|^2(t-\bar{t})^2\right)\left(\int \|\psi(\omega)\|^2(\omega-\bar{\omega})^2\right) \geq \frac{1}{4} \tag{1.17}$$

1.1.3 采样定理

最后介绍采样定理。我们想问：在时间表象中，若我以固定的间隔采样信号上的点，我是否能仅凭这些采样点恢复原信号？答案是有可能。简便起见，设采样间隔为 T，即我在 $-nT, -(n-1)T, \cdots -T, 0, T, \cdots, nT$ 进行了采样，记采样角频率 $\omega_s = \dfrac{2\pi}{T}$，则下面的插值方式有可能恢复原信号：

$$f_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)\mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right) \tag{1.18}$$

恢复成功，即 $x_t(t)=x(t)$ 的条件是原信号的角频率有上界，即 $\exists\omega_M, \forall\|\omega\| \geq \omega_M, \tilde{f}(\omega)=0$ 成立，且 $\omega_S > 2\omega_M$。这有一个十分直观的证明方式，考虑有如下 $h_r(t)$ 冲激响应的 LTI 系统，并给系统输入 $f_p(t)$：

$$h_t(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \quad f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)\delta(t-nT)$$

显然有 $\tilde{f}_r(\omega) = \tilde{h}_r(\omega)\tilde{f}_p(\omega)$，我们现在只需研究是否有 $\tilde{f}_r(\omega) = \tilde{f}(\omega)$ 即可。注意 $\mathrm{sinc}(\cdot)$ 函数的傅里叶变换有特殊的形式：

$$\tilde{h}_r(\omega) = \begin{cases} T & \|\omega\| < \dfrac{\pi}{T} \\ 0 & \|\omega\| > \dfrac{\pi}{T} = \dfrac{\omega_s}{2} \end{cases}$$

也就是说这个 $h_r(\cdot)$ 仅仅在复平面上的一个圆盘内有值，这个圆盘的半径是 $\dfrac{\omega_s}{2}$。下面求出 $\tilde{f}_p(\omega)$。注意到：

$$f_p(t) = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)\right) \cdot f(t) := s(t)\cdot f(t)$$

所以我要分别研究其中两个部分的傅里叶变换再做卷积。$s(t)$ 的傅里叶变换可能不好直接求，但是由于 $s(t)$ 是周期信号，我可以先将其展开成傅里叶级数，再做傅里叶变换：

$$s(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp(ik\omega_s t) \Rightarrow \tilde{s}(\omega) = \omega_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

$s(t)$ 中含有 $k\omega_s$ 这些所有频率。从而：

$$\tilde{f}_p(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega - k\omega_s)$$

这意味着采样的效果是将原有信号的频谱沿着实轴（因为 ω_s 是实数）复制若干份，采样频率越高（间隔越短），这些频谱的拷贝之间的间隔就越大。若 $\omega_s > 2\omega_M$，则 $\tilde{f}(\omega \pm 0\omega_s)$ 这“段”频谱将被完全覆盖在 $\tilde{h}(\omega)$ 的非零圆盘之内，而 $\tilde{f}(\omega \pm 1\omega_s)$ 将被完全排除在圆盘外，此时 $\tilde{f}_r(\omega) = \tilde{f}(\omega)$，信号被完全恢复了；若 $\omega_s < 2\omega_M$，则 $\tilde{f}(\omega \pm 0\omega_s)$ 和 $\tilde{f}(\omega \pm 1\omega_s)$ 将“混叠”在一起，此时当然 $\tilde{f}_r(\omega) \neq \tilde{f}(\omega)$。这就证明了采样定理。更严格地表述，考虑上面定义的频率有界的信号集合，也就是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的子空间 $\mathcal{H}_{\omega_M}$，则 $\left\{\mathrm{sinc}\left(\dfrac{t-nT}{T}\right)\right\}, T=\dfrac{\pi}{\omega_M}$ 是 $\mathcal{H}_{\omega_M}$ 上的一组正交完备基底。