



**CONTROL THEORY: NEW HORIZONS**

**SEASON #1**

# 控制系魔法师养成指南

**Control Theory : New Horizons**

作者：林焱是猫猫

组织：溯影市第一理工大学，自然哲学学部

## Season #1 完结宣言

本书的名字来源于一个相当困难的 Minecraft 整合包：GregTech: New Horizons/格雷科技：新视野 (<https://www.gtnewhorizons.com/>)，选择使用这个名字是因为我们希望制造一本不同以往的控制教材。国内已有的控制教材主要分为两派：一派讲解详细，然而全书以举例子为主，是典型的面向工科生的教材 (e.g. 胡寿松，自动控制原理)；另一派更加现代、更加亲民，然而过于亲民的讲法意味着要放弃对部分高级内容的深入讲解 (e.g. 王天威，控制之美)。本书的目标在于使用**直观**的方式讲解控制理论 (或者说尽可能多地使读者**理解**控制理论)，为了真正做到这一点，我们希望传递一些重要**观念** (在荣格的原典中，这种从观念或观念世界中的意象出发的思考方式被视为源自内倾思维功能)，这些观念是控制理论的骨架，任何一个人可以从它们出发，配合具体的数学工具、计算和证明技术来重建控制理论。此外，本书中的很多数学推导显然是不严格的，这是因为我认为在研究理论物理类似物的时候，过度追求数学证明上的严格将成为推进的阻碍，因为**我们能理解的东西远比我们能证明的东西多得多**！从另一个角度说，数学更应该被用于寻找各个问题、各个领域背后相似的结构。

控制理论或许是当今的夕阳学科，我们这样说是因为该学科已经到了行将就木 (进入教科书) 的年岁，相关领域热度逐渐下降。本书中我们给出的各种新观点 (这里的“新”指的是在以往教材中未被提及) 只不过是重走前人已行之路。同时，控制是一个投入很大、产出 (无论是指科研上的产出，还是指在世俗上获得的回报) 较小的领域 (或许所有满足 “The Party is Over.” 的领域都是这样)。但是，这些现象都不代表对这个领域的重新思考不会为我们带来新的启发。因此，为了体验从司空见惯的日常生活中抽象出问题的快乐，我们留在这里；为了一窥这些问题背后精巧的数学结构，我们留在这里；为了在 “数据驱动” 的浪潮中呼唤理性的回归，我们留在这里；为了召集和连接每一个思考者，让大家不再艰苦地孤军奋战，我们留在这里。

本书的第一季在龙堆控制器这一节结束。随着新的学期中对相关学科的进一步深入学习，第二季将很快回归 (我保证会在两年内搓出第二季)。最后列出本书第一季的主要参考资料 (包括给予我启发的资料/教材)：

- UCB EE120, 信号与系统
- 胡寿松《自动控制原理》
- 王天威《控制之美 I/II》
- 张杰, 王飞跃《最优控制》
- 陈童的量子新世界 (<https://newquanta.com/>)
- 知乎用户 @ 共青城双子星 (知乎主页 <https://www.zhihu.com/people/gqcshuang-zi-xing>)
- 知乎用户 @ 洛星尘 (知乎主页 [https://www.zhihu.com/people/zhx\\_ltutthson](https://www.zhihu.com/people/zhx_ltutthson))
- 北京理工大学自然哲学社

# 目录

<b>第 1 章 日常篇</b>	<b>1</b>
1.1 Day 1: 将时光凝聚成音符	2
1.1.1 傅里叶变换, 时间表象与频率表象	2
1.1.2 傅里叶变换的性质、线性时不变系统	4
1.1.3 采样定理	6
1.2 Day 2: 跨越百年的汽笛声	7
1.2.1 拉普拉斯变换、线性时不变系统与传递函数	7
1.2.2 一阶、二阶系统的冲激与阶跃响应	9
1.2.3 传递函数与系统稳定性的关系、比例控制器和积分控制器	10
1.2.4 根轨迹和伯德图	11
1.3 Day 3: 欲于状态空间起舞	14
1.3.1 状态空间中的稳定性判据	14
1.3.2 系统的可控性与可观性	16
1.3.3 控制器与观测器的设计	18
1.4 Day 4: 弱水三千取一瓢	21
1.4.1 控制律无约束的最优控制: 乘子法和标准变分法	21
1.4.2 控制律有约束的最优控制: 庞特里亚金极值原理	23
1.4.3 连续时间动态规划: 哈密顿-雅可比-贝尔曼方程	27
1.4.4 简单例子: 线性二次型调节器	29
1.4.5 * 试验内容: 最优控制与经典力学的关系; 一类最优控制问题的几何化	30
<b>第 2 章 核心抑制篇</b>	<b>34</b>
2.1 核心抑制: 核电, 轻而易举啊!	35
2.1.1 反应堆的状态空间模型	35
2.1.2 瞬时最大发电功率控制器	37
2.1.3 全程最大发电量控制器	38
2.2 核心抑制: 人生海海, 山山而川	40

# 第1章 日常篇

## 1.1 Day 1: 将时光凝聚成音符

### 1.1.1 傅里叶变换, 时间表象与频率表象

众所周知, 对于现实世界中的一个质点, 我们可以使用  $\mathbb{R}^3$  中的矢量表示其位置; 对刚体的转动操作是  $SO(3)$  群的群元,  $SO(3)$  群的最小维度的非平凡的不可约表示 (定义表示) 也将  $SO(3)$  的任意群元表示为  $\mathbb{R}^3$  中的矢量。信号是否能用矢量表示呢? 考虑最贴近我们的生活的两种情况: 1) 信号可以是有限个像素的图像, 这时你只需要 `torch.flatten(img)` 就把它变成矢量了; 2) 信号可以是在时间上延展的音频, 此时, 时间  $t$  起到了和向量下标  $i$  相同的作用, 直观上可以说音频信号是“无穷维”的矢量。形式化地, 在本文中, 信号被视为希尔伯特空间中的矢量。要聊希尔伯特空间, 要从复内积空间开始聊起。

在一个线性空间中装备内积, 该线性空间就变成内积空间。在复内积空间中的内积必须满足性质:

- (共轭) 对称性:  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$
- 对第二个槽位的线性性:  $\langle \mathbf{z}, \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle + \beta \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle$
- 正定性:  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ , 且  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$  当且仅当  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 。

在复内积空间的基础上, 若空间中的任何柯西列都收敛到该空间中的某一点 (或者直观来说, 该空间没有被挖一个洞), 则称该空间是希尔伯特空间。

希尔伯特空间  $\mathcal{H}$  到自身的线性映射被称为  $\mathcal{H}$  上的线性算符。对于线性算符  $O$ , 可定义其伴随算符  $O^\dagger$ :

$$\langle \mathbf{x}, O\mathbf{y} \rangle = \langle O^\dagger \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad (1.1)$$

若算符  $O$  的伴随算符等于自身, 即  $O = O^\dagger$ , 则称  $O$  是自伴的或厄米的。厄米算符有**实本征值**, 且**对应不同本征值的本征矢量互相正交**。我们来证明这一性质。

首先证明其本征值是实数, 设  $\mathbf{v}$  是  $O$  的对应本征值  $\lambda$  的本征矢量。由于  $O$  厄米, 从而  $\langle \mathbf{v}, O\mathbf{v} \rangle = \langle O\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$ , 从而:

$$\langle \mathbf{v}, \lambda \mathbf{v} \rangle = \langle \lambda \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \Rightarrow \lambda^* \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \lambda \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$$

立刻发现  $\lambda$  是实数。下面证明本征矢量的正交性质。继续设  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  是  $O$  的对应本征值  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  的本征矢量, 从而  $\langle \mathbf{v}_1, O\mathbf{v}_2 \rangle = \langle O\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ , 进一步地:

$$\langle \mathbf{v}_1, \lambda_2 \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \lambda_1 \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \Rightarrow \lambda_2 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \lambda_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$$

注意这里我们已经使用了本征值为实数的性质。由于  $\lambda_1, \lambda_2$  不等, 从而  $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$ , 这就完成了证明。

此外, 我们还会使用一个性质, 即所谓谱定理。称一个算符  $O$  是正规算符, 若  $O^\dagger O = O O^\dagger$ 。谱定理指出有限维复矢量空间上的正规算符均可被对角化。这意味着  $N$  维复矢量空间上的正规算符有  $N$  个线性无关的本征矢量, 这些本征矢量可以作为该复矢量空间的一组基底。不加证明地, 我们直接将谱定理推广到无穷维复矢量空间中。

显然, 一般的两个线性映射 (两个矩阵) 的复合 (乘法) 不会满足交换律, 希尔伯特空间中的算符亦然。定义算符的对易子:

$$[A, B] = AB - BA \quad (1.2)$$

若两个算符的对易子不为 0, 则它们是不满足交换律的。下面我们的讨论将围绕一对特殊的算符展开。考虑无穷维的希尔伯特空间, 设我们有时间算符  $T$  和频率算符  $\Omega$ , 它们均为厄米算符, 且它们之间的对易子为:

$$[T, \Omega] = i \quad (1.3)$$

根据上文中提到的谱定理, 既然  $T, \Omega$  都是无穷维希尔伯特空间中的厄米算符, 则它们应当有无穷多本征矢量, 这些本征矢量构成希尔伯特空间的完备基底。对于空间中任何一个矢量, 它既可以由  $T$  的本征矢量线性表出, 又可用  $\Omega$  的本征矢量线性表出。下面我们研究这两种线性表出的方式中, 基底前面的系数有什么关系。下文中我们将使用符号  $|\psi\rangle$  代表希尔伯特空间中的矢量, 使用  $\langle\psi|$  代表  $|\psi\rangle$  的对偶矢量。内积  $\langle\phi|, |\psi\rangle\rangle$  可以视作  $|\phi\rangle$  的对偶矢量  $\langle\phi|$  作用在  $|\psi\rangle$  上的结果, 因此记作  $\langle\phi|\psi\rangle$ 。 $\langle\phi|, A|\psi\rangle\rangle$  被记作  $\langle\phi|A|\psi\rangle$ 。

我们来考虑位置算符  $\Omega$  对时间算符  $T$  的本征矢的作用。将时间算符  $T$  的本征值为  $t$  的本征矢记为  $|t\rangle$ ，我们约定  $|t\rangle$  满足正交归一关系，即：

$$\langle t|t'\rangle = \delta(t - t') \quad (1.4)$$

考虑算符  $\mathcal{T}(\Delta t) = 1 - i\Omega\Delta t$ ，其中  $\Delta t \rightarrow 0$ 。将其作用在  $|t\rangle$  上：

$$\begin{aligned} T\mathcal{T}(\Delta t)|t\rangle &= T|t\rangle - i\Delta t T\Omega|t\rangle \\ &= t|t\rangle - i\Delta t(T\Omega - \Omega T + \Omega T)|t\rangle \\ &= (t + \Delta t)|t\rangle - i\Delta t \cdot t \Omega|t\rangle \\ &\approx (t + \Delta t)(1 - i\Omega\Delta t)|t\rangle \\ &= (t + \Delta t)\mathcal{T}(\Delta t)|t\rangle \end{aligned} \quad (1.5)$$

在上面的推导中，我们已经忽略了二阶小量。可以看出， $\mathcal{T}|t\rangle$  依然是  $T$  的本征矢，只不过其对应的本征值是  $t + \Delta t$ ，从而我们可以说算符  $\mathcal{T}(\Delta t)$  是（无穷小）时间平移算符，它对  $T$  的本征矢起到了平移作用。有限长时间的平移算符可以通过无穷小时间的平移算符作用无穷多次来得到，不难看出，有限长时间平移算符的形式是：

$$\mathcal{T}(t) = \exp(-i\Omega t) \quad (1.6)$$

直观上，我们可以说，有限长时间平移算符是由频率算符  $\Omega$  “生成”的，所以说频率算符是时间平移算符的“生成元”。不难发现  $\mathcal{T}$  满足性质  $\mathcal{T}^\dagger\mathcal{T} = 1$ ，我们将满足这个性质的算符称为幺正算符。（更严格地，我们是在说时间平移算符是时间平移群在希尔伯特空间中的幺正表示，频率算符是其单位元处切空间内的一个元素。）

下面考虑  $\langle t|\mathcal{T}(\Delta t)|\psi\rangle$ ， $|\psi\rangle$  是任意矢量， $\Delta t \rightarrow 0$ 。利用  $\langle t|\mathcal{T}(\Delta t) = (\mathcal{T}(-\Delta t)|t)\rangle^\dagger = \langle t - \Delta t|$ ：

$$\begin{aligned} \langle t|\mathcal{T}(\Delta t)|\psi\rangle &= \langle t|\psi\rangle - i\Delta t\langle t|\Omega|\psi\rangle \\ &= \langle t - \Delta t|\psi\rangle \\ &= \langle t|\psi\rangle - \frac{\partial}{\partial t}\langle t|\psi\rangle\Delta t \end{aligned}$$

从而立刻得到：

$$\langle t|\Omega|\psi\rangle = -i\frac{\partial}{\partial t}\langle t|\psi\rangle \quad (1.7)$$

注意：在一些教科书上，你可能看到这样的记法： $\Omega = -i\frac{\partial}{\partial t}$ ，但显然这种做法只是上式的简记（或者说是在逗你玩），因为右边这个东西根本不是希尔伯特空间中的算符。个人认为更好的写法应该是  $\Omega = -i\int|\tau\rangle\langle\tau|\frac{\partial}{\partial\tau}d\tau$ ，或者采用 @ 东云正树的记法  $\langle t|\Omega = -i\frac{\partial}{\partial t}$ 。

在研究最终问题之前（如何使用  $T$  和  $\Omega$  的本征矢来展开一个矢量），还需做一个准备，我们求出  $\langle t|\omega\rangle$ ，其中  $|\omega\rangle$  是  $\Omega$  的本征值为  $\omega$  的本征矢，同样满足与  $|t\rangle$  类似的正交关系，但是多了个系数：

$$\langle\omega|\omega'\rangle = (2\pi)\delta(\omega - \omega') \quad (1.8)$$

直接利用上文中推导出的结论：

$$\langle t|\Omega|\omega\rangle = \omega\langle t|\omega\rangle = -i\frac{\partial}{\partial t}\langle t|\omega\rangle$$

该微分方程的解是：

$$\langle t|\omega\rangle = C_0 \exp(i\omega t) \quad (1.9)$$

利用前面约定过的， $|t\rangle, |\omega\rangle$  的正交归一关系，以及  $\delta(\cdot)$  的积分表示：

$$\int dt\langle\omega'|t\rangle\langle t|\omega\rangle = (2\pi)\delta(\omega - \omega') \quad \delta(k) = \frac{1}{2\pi} \int \exp(ikx)dx$$

推出系数  $C_0 = 1$ 。从而：

$$\langle\omega|\psi\rangle = \int dt\langle\omega|t\rangle\langle t|\psi\rangle = \int dt \exp(-i\omega t)\langle t|\psi\rangle \quad (1.10)$$

其中已利用了  $|t\rangle$  的完备性关系  $\int dt |t\rangle\langle t| = 1$ 。利用  $|\omega\rangle$  的完备性关系  $\int d\omega |\omega\rangle\langle\omega| = 2\pi$  立刻得到：

$$\langle t|\psi\rangle = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \langle t|\omega\rangle\langle\omega|\psi\rangle = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \exp(+i\omega t)\langle\omega|\psi\rangle \quad (1.11)$$

这样，我们就导出了任意矢量  $|\psi\rangle$  在  $|t\rangle, |\omega\rangle$  两组基底上展开系数的关系。上面这两个式子正是我们熟知的傅里叶变换。 $\langle t|\psi\rangle$  是我们通常说的时域中的信号  $f(t)$ ，而  $\langle\omega|\psi\rangle$  则是频域中的信号  $f(\omega)$ ，它们其实只是希尔伯特空间中的同一个矢量在两组正交基上的投影。当我们在时域中处理问题时，我们总是把代表信号的矢量投影到  $|t\rangle$  这组基底上，我们说我们是在**时间表象** (Representation) 中处理问题，相似地，在频域中处理问题时，我们总是把信号投影到  $|\omega\rangle$  这组基底上，我们说我们是在**频率表象** 中处理问题。

### 1.1.2 傅里叶变换的性质、线性时不变系统

下面介绍傅里叶变换的重要性质，先从简单的开始。简便起见，时间表象中的信号被记作  $f(t)$ ，而频率表象中的信号被记作  $\tilde{f}(\omega)$ ：

线性性： $\mathcal{F}[af_1(t) + bf_2(t)] = a\tilde{f}_1(\omega) + b\tilde{f}_2(\omega)$ ，由于信号是希尔伯特空间中矢量，显然成立。

时移性质： $\mathcal{F}[f(t - t_0)] = \tilde{f}(\omega) \exp(-i\omega t_0)$ 。利用时间平移算符的定义容易证明。

频移性质： $\mathcal{F}[\exp(i\omega_0)t]f(t) = \tilde{f}(\omega - \omega_0)$ 。 $\Omega$  是时间平移的生成元， $T$  是频移生成元。

尺度变换： $\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} \tilde{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$ 。

两次傅里叶变换： $f(t)$  两次正变换得到  $2\pi f(-t)$ 。做完第一次变换后，将反变换中  $t$  换成  $-t$  即可看出这个结果。

时域微分：求导一次多一个  $i\omega$ ，即  $\mathcal{F}\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = (i\omega)^n \tilde{f}(\omega)$ ，证明：

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) \exp(-i\omega t) dt &= [f(t) \exp(-i\omega t)]_{-\infty}^{+\infty} - (-i\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\omega t) f(t) dt \\ &= 0 + i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\omega t) f(t) dt \end{aligned}$$

频域微分： $\mathcal{F}[(-it)f(t)] = \frac{d}{d\omega} \tilde{f}(\omega)$ ，证明：正变换两侧对  $\omega$  求导：

$$\frac{d}{d\omega} \tilde{f}(\omega) = \int f(t) (-it) \exp(-i\omega t) dt$$

傅里叶变换有一系列重要性质是所谓卷积性质。但是在研究卷积性质之前，我们先介绍卷积这个操作是怎么来的，这需要研究线性时不变系统。线性时不变系统显然是吃掉一个信号，吐出另一个信号的东西，因此它也是希尔伯特空间中的线性算符。直观起见，我们在时间表象中叙述其性质。称线性算符  $T$  是线性时不变 (Linear Time-Invariance) 系统，若它除了线性性 (废话) 之外还满足性质 (时不变性)：

$$T[x(t)] = y(t) \Rightarrow T[x(t - t_0)] = y(t - t_0) \quad (1.12)$$

这个性质使我们可以方便地求出其输出。定义 LTI 系统输入  $\delta(\cdot)$  函数后的输出为冲激响应  $h(t) = T[\delta(t)]$ 。对于任意输入信号，它在  $t$  时刻的值可以利用  $\delta(\cdot)$  筛选出来： $x(t) = \int d\tau x(\tau) \delta(t - \tau)$ ，利用 LTI 系统的两个性质：

$$y(t) = T[x(t)] = \int d\tau x(\tau) h(t - \tau) \quad (1.13)$$

因此，LTI 系统的输出是输入信号和冲激响应的卷积，直观上，这意味着  $\tau + \Delta\tau$  时间内的输入  $x(\tau)\Delta\tau$  可以被冲

激函数  $\delta(t-\tau)x(\tau)\Delta\tau$  替代, 然后所有的输入叠加。下面证明傅里叶变换的卷积性质:  $\mathcal{F}[x(t)*h(t)] = \tilde{f}(\omega)\tilde{h}(\omega)$

$$\begin{aligned}\tilde{y}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \exp(-i\omega t)dt \\ &= \int x(\tau) \int h(t-\tau) \exp(-i\omega t)dt d\tau \\ &= \int x(\tau) \int h(u) \exp(-i\omega(u+\tau))du d\tau \\ &= \int x(\tau) \exp(-i\omega\tau)\tilde{h}(\omega)d\tau \\ &= \tilde{x}(\omega)\tilde{h}(\omega)\end{aligned}$$

也就是说, 时间表象上两个信号的卷积, 傅里叶变换后得到频率表象上两个信号的相乘。这个结果也说明频率表象中, LTI 系统的输入和输出有关系:

$$\tilde{h}(\omega) = \frac{\tilde{y}(\omega)}{\tilde{x}(\omega)} \quad (1.14)$$

这里的  $\tilde{h}(\omega)$  就是之前介绍的时间表象上冲激响应的傅里叶变换, 又被称为传递函数 (在后面介绍的自动控制原理中, 我们将利用拉普拉斯变换再定义一次传递函数)。这个写法其实意味着代表任意线性时不变系统的算符  $T$  是可以使用  $|\omega\rangle$  这组基底对角化的, 也就是  $T|\omega\rangle = \tilde{h}(\omega)|\omega\rangle$ , 因此, 任意线性时不变系统是希尔伯特空间中的正规算符 ( $\tilde{h}(\omega)$  显然不一定是实数)。

此外, 考虑

$$\int \langle \psi|t\rangle\langle t|\psi\rangle dt = \langle \psi|\psi\rangle \quad \frac{1}{2\pi} \int \langle \psi|\omega\rangle\langle \omega|\psi\rangle = \langle \psi|\psi\rangle$$

立刻得到所谓帕塞瓦尔等式:

$$\int \|\psi(t)\|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int \|\psi(\omega)\|^2 d\omega \quad (1.15)$$

此外, 傅里叶变换有重要性质: 信号的时间表象  $f(t)$  和频率表象  $\tilde{f}(\omega)$  不能被同时确定。为了说明这一点, 我们先证明更一般的不确定性关系。设有信号  $|\psi\rangle$  模长为 1, 以及给定任意两个厄米算符  $A, B$ , 考虑表达式:

$$\begin{aligned}\langle \psi|A|\psi\rangle &= \int d\alpha d\alpha' \langle \psi|\alpha\rangle\langle \alpha|A|\alpha'\rangle\langle \alpha'|\psi\rangle \\ &= \int \alpha \psi^2(\alpha) d\alpha\end{aligned}$$

这里的  $|\alpha\rangle$  是  $A$  的正交归一本征矢。换言之, 若将  $\psi^2(\alpha)$  视作概率密度 (这意味着我使用了一个概率诠释:  $A, B$  是 (信号的) 某种可观测量, 每次进行观测时, 有  $\|\langle \alpha|\psi\rangle\|^2$  的概率得到  $\alpha$  这个结果), 则上式是期望的形式。引入新的算符:

$$\Delta A = A - \langle \psi|A|\psi\rangle I \quad \Delta B = B - \langle \psi|B|\psi\rangle$$

立刻看出:

$$\langle \psi|(\Delta A)^2|\psi\rangle = \langle \psi|A^2|\psi\rangle - (\langle \psi|A|\psi\rangle)^2$$

回忆对于随机变量  $X$ , 有  $\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$ , 上面这个式子可理解为 “ $\alpha$  的方差”。考虑:

$$\begin{aligned}\text{Var}[\alpha]\text{Var}[\beta] &= \langle \psi|(\Delta A)^2|\psi\rangle\langle \psi|(\Delta B)^2|\psi\rangle \\ &= \langle \psi|(\Delta A)^\dagger(\Delta A)|\psi\rangle\langle \psi|(\Delta B)^\dagger(\Delta B)|\psi\rangle \\ &= \langle f|f\rangle\langle g|g\rangle \quad |f\rangle = \Delta A|\psi\rangle, |g\rangle = \Delta B|\psi\rangle \\ &\geq (\langle f|g\rangle)^2\end{aligned}$$

最后一步使用了柯西-施瓦茨不等式。而  $\langle f|g\rangle = \langle \psi|\Delta A\Delta B|\psi\rangle$ , 而:

$$\Delta A\Delta B = \frac{1}{2}\{\Delta A, \Delta B\} + \frac{1}{2}[\Delta A, \Delta B], \quad \{\Delta A, \Delta B\} = \Delta A\Delta B + \Delta B\Delta A$$

类比  $\|x + iy\|^2 \geq y^2$ , 我可以把  $\{\cdot, \cdot\}$  的部分扔掉:

$$\text{Var}[\alpha]\text{Var}[\beta] \geq \frac{1}{4}(\langle \psi | [\Delta A, \Delta B] | \psi \rangle)^2 = \frac{1}{4}(\langle \psi | [A, B] | \psi \rangle)^2 \quad (1.16)$$

这是一般的不确定性关系, 两个“方差”的乘积由两个算符的对易子决定。两个不对易的“可观测量”, 例如本文中的时间和频率将不能同时被精确地确定。现在令  $A = T, B = \Omega$ , 上式变成:

$$\text{Var}[t]\text{Var}[\omega] \geq \frac{1}{4}$$

或者显式地写出这个结果:

$$\left( \int \|\psi(t)\|^2 (t - \bar{t})^2 \right) \left( \int \|\psi(\omega)\|^2 (\omega - \bar{\omega})^2 \right) \geq \frac{1}{4} \quad (1.17)$$

### 1.1.3 采样定理

最后介绍采样定理。我们想问: 在时间表象中, 若我以固定的间隔采样信号上的点, 我是否能仅凭这些采样点恢复原信号? 答案是有可能。简便起见, 设采样间隔为  $T$ , 即我在  $-nT, -(n-1)T, \dots, -T, 0, T, \dots, nT$  进行了采样, 记采样角频率  $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ , 则下面的插值方式有可能恢复原信号:

$$f_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT) \text{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right) \quad (1.18)$$

恢复成功, 即  $x_t(t) = x(t)$  的条件是原信号的角频率有上界, 即  $\exists \omega_M, \forall \|\omega\| \geq \omega_M, \tilde{f}(\omega) = 0$  成立, 且  $\omega_s > 2\omega_M$ 。这有一个十分直观的证明方式, 考虑有如下  $h_r(t)$  冲激响应的 LTI 系统, 并给系统输入  $f_p(t)$ :

$$h_t(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \quad f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)\delta(t-nT)$$

显然有  $\tilde{f}_r(\omega) = \tilde{h}_r(\omega)\tilde{f}_p(\omega)$ , 我们现在只需研究是否有  $\tilde{f}_r(\omega) = \tilde{f}(\omega)$  即可。注意  $\text{sinc}(\cdot)$  函数的傅里叶变换有特殊的形式:

$$\tilde{h}_r(\omega) = \begin{cases} T & \|\omega\| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \|\omega\| > \frac{\pi}{T} = \frac{\omega_s}{2} \end{cases}$$

也就是说这个  $h_r(\cdot)$  仅仅在复平面上的一个圆盘内有值, 这个圆盘的半径是  $\frac{\omega_s}{2}$ 。下面求出  $\tilde{f}_p(\omega)$ 。注意到:

$$f_p(t) = \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) \right) \cdot f(t) := s(t) \cdot f(t)$$

所以我要分别研究其中两个部分的傅里叶变换再做卷积。 $s(t)$  的傅里叶变换可能不好直接求, 但是由于  $s(t)$  是周期信号, 我可以先将其展开成傅里叶级数, 再做傅里叶变换:

$$s(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp(ik\omega_s t) \Rightarrow \tilde{s}(\omega) = \omega_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

$s(t)$  中含有  $k\omega_s$  这些所有频率。从而:

$$\tilde{f}_p(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega - k\omega_s)$$

这意味着采样的效果是将原有信号的频谱沿着实轴 (因为  $\omega_s$  是实数) 复制若干份, 采样频率越高 (间隔越短), 这些频谱的拷贝之间的间隔就越大。若  $\omega_s > 2\omega_M$ , 则  $\tilde{f}(\omega \pm 0\omega_s)$  这“段”频谱将被完全覆盖在  $\tilde{h}(\omega)$  的非零圆盘之内, 而  $\tilde{f}(\omega \pm 1\omega_s)$  将被完全排除在圆盘外, 此时  $\tilde{f}_r(\omega) = \tilde{f}(\omega)$ , 信号被完全恢复了; 若  $\omega_s < 2\omega_M$ , 则  $\tilde{f}(\omega \pm 0\omega_s)$  和  $\tilde{f}(\omega \pm 1\omega_s)$  将“混叠”在一起, 此时当然  $\tilde{f}_r(\omega) \neq \tilde{f}(\omega)$ 。这就证明了采样定理。更严格地表述, 考虑上面定义的频率有界的信号集合, 也就是希尔伯特空间  $\mathcal{H}$  的子空间  $\mathcal{H}_{\omega_M}$ , 则  $\left\{ \text{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right) \right\}, T = \frac{\pi}{\omega_M}$  是  $\mathcal{H}_{\omega_M}$  上的一组正交完备基底。

## 1.2 Day 2: 跨越百年的汽笛声

“控制”的概念在蒸汽时代早已有之。当时有人（一说是改良蒸汽机的詹姆斯·瓦特，而维基百科认为这一说法是错误的）为蒸汽机设计了离心式调速器。该装置在蒸汽机的转轴上连接了两颗摆球，根据离心力和重力的力矩平衡可以知道，蒸汽机的转速越快，两颗摆球偏离垂直方向的角度越大。两颗摆球被连接到蒸汽机的阀门上，摆球的偏角被用于控制进气阀门的开闭，从而将蒸汽机的转速维持在一定范围内。这可能是世界上最早的控制装置之一。个人认为，在现代汉语的语境中，“控制”一词下面主要包含两个部分：1) 对系统的性态（例如稳定性）进行分析；2) 泛函求极值。本节中我们首先探讨**经典控制理论**，它处理的是动力系统中极小的一部分：单输入、单输出的线性时不变系统。

### 1.2.1 拉普拉斯变换、线性时不变系统与传递函数

之前我们说过，因为任意线性时不变系统对应了希尔伯特空间中的正规算符，我们将能找到一组基底将其对角化。因此，在频率表象中处理问题十分简便。然而，不是所有函数  $f(t)$  均有其傅里叶变换， $\tilde{f}(\omega)$  的存在性依赖于平方可积条件：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|f(t)\|^2 dt < \infty \quad (1.19)$$

为了解决某些信号无法进行傅里叶变换的问题，我们将引入拉普拉斯变换。考虑算符  $\mathcal{S}$ ，它与时间算符有对易关系：

$$[T, \mathcal{S}] = -1 \quad (1.20)$$

仍考虑  $\mathcal{S}$  对  $T$  的本征矢的作用。令算符  $\mathcal{T} = 1 - \mathcal{S}\Delta t$ ，其中  $\Delta t \rightarrow 0$ ，仿照前文推导有：

$$\begin{aligned} T\mathcal{T}(\Delta t)|t\rangle &= T|t\rangle - \Delta t T\mathcal{S}|t\rangle \\ &= |t\rangle - \Delta t(T\mathcal{S} - \mathcal{S}T + \mathcal{S}T)|t\rangle \\ &= (t + \Delta t)|t\rangle - \Delta t \cdot t\mathcal{S}|t\rangle \\ &= (t + \Delta t)(1 - \mathcal{S}\Delta t)|t\rangle \\ &= (t + \Delta t)\mathcal{T}(\Delta t)|t\rangle \end{aligned} \quad (1.21)$$

所以我们这里定义的  $\mathcal{T} = 1 - \mathcal{S}\Delta t$  也是平移算符。仍然考虑：

$$\begin{aligned} \langle t|\mathcal{T}(\Delta t)|\psi\rangle &= \langle t|\psi\rangle - \Delta t\langle t|\mathcal{S}|\psi\rangle \\ &= \langle t - \Delta t|\psi\rangle \\ &= \langle t|\psi\rangle - \frac{\partial}{\partial t}\langle t|\psi\rangle\Delta t \end{aligned}$$

从而求出：

$$\langle t|\mathcal{S}|\psi\rangle = +\frac{\partial}{\partial t}\langle t|\psi\rangle \quad (1.22)$$

现在考虑  $\mathcal{S}$  的本征矢量在  $|t\rangle$  下的分解。首先，如果  $A, B$  两个算符均为厄米算符，则：

$$[A, B]^\dagger = (AB)^\dagger - (BA)^\dagger = BA - AB = [B, A]$$

而上面的  $[T, \mathcal{S}] = -1$  不满足这个结论。我们已经指定了  $T$  是厄米算符，从而  $\mathcal{S}$  必然不是厄米算符，它的本征值可以是复数。考虑：

$$\langle t|\mathcal{S}|s\rangle = s\langle t|s\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\langle t|s\rangle \Rightarrow \langle t|s\rangle = \exp(st)$$

上式中， $\exp(st)$  之前本来应当有一个未定常数，简便起见，我们将此常数设置为 1。这样我们求出了  $\mathcal{S}$  的右本征矢量在时间表象下的形式。注意：由于  $s$  是非厄米的，因此  $(|s\rangle)^\dagger$  并不是  $\mathcal{S}$  的左本征矢量。左本征矢量需要重新求：

$$\langle\psi|\mathcal{S}|t\rangle = -\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi|t\rangle \Rightarrow \langle s|t\rangle s = -\frac{\partial}{\partial t}\langle s|t\rangle \Rightarrow \langle s|t\rangle = \exp(-st) \quad (1.23)$$

这里也将未定常数设置为 1。从而：

$$\langle s|\psi\rangle = \int \langle s|t\rangle \langle t|\psi\rangle = \int \exp(-st) \langle t|\psi\rangle \quad (1.24)$$

这是我们熟悉的(双边)拉普拉斯变换。一般而言,在经典控制的分析中,我们会约定时间表象下  $\langle t|\psi\rangle = 0, \forall t < 0$ , 从而上面的积分可以不对  $[-\infty, +\infty]$  进行, 而是使用所谓单边拉普拉斯变换:

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{+\infty} \exp(-st) f(t) \quad (1.25)$$

在做拉普拉斯逆变换的时候, 我们需要考虑  $|s\rangle, \langle s|$  的完备性关系。注意  $|s\rangle$  是一组过完备的基底, 因此在写出完备性关系的时候, 我们无需对  $s \in \mathbb{C}$  积分, 应当注意:  $\exp(-i\omega t)$  已经是希尔伯特空间中的一组完备基底, 因此  $\exp(-i\omega t) \exp(\sigma)$  也是一组完备基底, 这意味这完备性关系中的积分只需对复平面上平行于虚轴的一条直线进行。将积分路径记为  $\Gamma$ , 设完备性关系的形式是:

$$1 = C_0 \int_{\Gamma} |s\rangle \langle s| ds$$

两侧同乘  $\langle t|t'\rangle$ , 得到:

$$\begin{aligned} \langle t|t'\rangle &= C_0 \int_{\Gamma} \langle t|s\rangle \langle s|t'\rangle ds \\ &= C_0 \int_{\Gamma} \exp(st) \exp(-st) \end{aligned}$$

取  $\Gamma$  为  $\sigma - i\infty$  到  $\sigma + i\infty$  的直线:

$$\begin{aligned} \langle t|t'\rangle &= C_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\sigma(t-t')) \exp(i\omega(t-t')) d(i\omega) \\ &= iC_0 \exp(\sigma(t-t')) (2\pi) \delta(t-t') \\ &= iC_0 (2\pi) \delta(t-t') \end{aligned}$$

从而取  $C_0 = \frac{1}{2\pi i}$ , 完备性关系:

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} |\sigma + i\omega\rangle \langle \sigma + i\omega| d(i\omega), \sigma \in \mathbb{R} \quad (1.26)$$

通过插入这个完备性关系, 可得到拉普拉斯逆变换:

$$\langle t|\psi\rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle t|\sigma + i\omega\rangle \langle \sigma + i\omega|\psi\rangle d(i\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp((\sigma + i\omega)t) \tilde{f}(\sigma + i\omega) d(i\omega) \quad (1.27)$$

下面直接给出拉普拉斯变换的常见性质, 不再证明:

线性性质:  $\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\tilde{f}(s) + b\tilde{g}(s)$

微分性质:  $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} \tilde{f}^{(k)}(0^-)$

积分性质:  $\mathcal{L}[\int_{0-}^t f(\tau) d\tau] = \frac{1}{s} \tilde{f}(s)$

频移性质:  $\mathcal{L}[\exp(at)f(t)] = \exp(-s\tau) \tilde{f}(s)$

时移性质:  $\mathcal{L}[f(t-\tau)u(t-\tau)] = \exp(-s\tau) \tilde{f}(s)$

尺度变换:  $\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} \tilde{f}\left(\frac{s}{a}\right)$

卷积性质:  $\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = \tilde{f}(s) \tilde{g}(s)$

我们同样可以将线性时不变系统的冲激响应的拉普拉斯变换定义为其传递函数  $G(s)$ 。若输入、输出的拉普拉斯变换分别为  $X(s), U(s)$ , 则:

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} \quad (1.28)$$

在经典控制中, 我们通常需要在被控系统前面串联一个控制器, 控制器自身也是一个单输入、单输出的时不变系统, 其传递函数为  $C(s)$ 。根据控制器输入量的不同, 控制方式可被分为两类:

- 若控制器的输入与被控制系统的输出无关, 是某个人为指定的参考值, 其拉普拉斯变换为  $R(s)$ , 这样的系统

被称为开环控制系统，其输出  $X(s) = R(s)C(s)G(s)$

- 若控制器的输入是参考值与被控系统输出的差  $E(s) = R(s) - X(s)$ ，这样的系统被称为闭环控制系统。系统的输出： $X(s) = (R(s) - X(s))C(s)G(s) \Rightarrow X(s) = \frac{C(s)G(s)R(s)}{1 + C(s)G(s)}$ ，因此，控制器和被控系统组成的新系统的传递函数（闭环传递函数）是  $G_{cl}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$ 。

### 1.2.2 一阶、二阶系统的冲激与阶跃响应

现在考虑两种最典型的线性时不变系统。首先研究一个典型的一阶系统：

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = au(t) \quad (1.29)$$

其中  $x(t)$  是系统的状态， $u(t)$  是输入（控制量），考虑零初始状态 ( $x(0) = 0$ )，两侧做拉普拉斯变换可求出传递函数：

$$sX(s) + aX(s) = aU(s) \Rightarrow G(s) = \frac{a}{s + a} \quad (1.30)$$

考虑两种最常见的输入：单位冲激函数，其拉普拉斯变换  $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ ；单位阶跃函数，其拉普拉斯变换为  $\mathcal{L}[\text{step}(t)] = \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$ 。系统的冲激响应：

$$X(s) = U(s)G(s) = 1 \cdot \frac{s}{s + a} \Rightarrow x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s}{s + a} \right] = a \exp(-at) \quad (1.31)$$

在  $a > 0$  时，系统的输出随时间衰减，反之  $a < 0$  时系统要爆炸。再考虑阶跃响应：

$$X(s) = U(s)G(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{a}{s + a} = \frac{a}{s(s + a)} \Rightarrow x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s - 0} - \frac{1}{s + a} \right] = 1 - \exp(-at) \quad (1.32)$$

在  $a > 0$  时，系统的输出趋于终值  $x(+\infty) = 1$ ， $a < 0$  时系统爆炸。通常将  $\tau = \frac{1}{a}$  称为系统的时间常数，该常数越小，系统的响应越快。

研究受迫的阻尼振子，一个典型的二阶系统：

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = f(t)$$

简便起见，定义系统的固有频率  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ，阻尼比  $\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}}$ ，系统的动力学方程写成：

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dx(t)}{dt} + \omega_n^2 x(t) = \omega_n^2 u(t) \quad (1.33)$$

仍然考虑零初始状态，两侧做拉普拉斯变换给出传递函数：

$$s^2 X(s) + 2\zeta\omega_n s X(s) + \omega_n^2 X(s) = \omega_n^2 U(s) \Rightarrow G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1.34)$$

考虑其阶跃响应，也就是说我们要对

$$X(s) = G(s)U(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s}$$

做拉普拉斯逆变换。当然这里可以使用上文中给出的逆变换公式计算，但是更简单的方式是将  $X(s)$  写成

$$\frac{A}{s - s_{p_1}} + \frac{B}{s - s_{p_2}} + \frac{C}{s - s_{p_3}}$$

的形式，然后直接查表。为此，解出  $X(s)$  的三个极点，即  $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$  的三个零点是：

$$s_{p_1} = 0, s_{p_2} = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}i, s_{p_3} = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}i \quad (1.35)$$

此时比较两侧分子可求出  $A, B, C$ ，之后可直接查表求出  $x(t)$ 。一个有趣的观察是随着阻尼比  $\zeta$  的增大，系统的阶跃响应发生什么变化。在  $\zeta \in [0, 1)$  时， $s_{p_2}, s_{p_3}$  的虚部均不为 0，此时  $B \exp(s_{p_2}t) + C \exp(s_{p_3}t)$  必然由于这个虚部的存在而震荡，这一阶段称为欠阻尼；在  $\zeta = 1$  时， $s_{p_2}, s_{p_3}$  的虚部消失，此时系统将无震荡地走向平衡点，称为临界阻尼；在  $\zeta > 1$  时， $s_{p_2} = -(\zeta + \sqrt{\zeta^2 + 1})\omega_n$ ， $s_{p_3} = -(\zeta - \sqrt{\zeta^2 + 1})\omega_n$ ，随着  $\zeta$  继续增大， $s_{p_2}$  逐渐向实轴左侧无穷远处移动，而  $s_{p_3}$  逐渐向 0 移动。此时系统收敛到平衡点的速度是被  $s_{p_3}$  控制的，因此随着阻尼的

增大, 收敛速度反而越来越慢了。这解释了为什么在临界阻尼时, 二阶系统将会最快回到平衡点。在工程上, 我们也会关注二阶系统的一些重要性能指标, 如输入为单位阶跃函数时,  $x(t)$  第一次达到 1 的时间 (上升时间  $T_r$ , 仅在欠阻尼情形下可被定义); 系统输出的最大值与 1 的差 (最大超调量  $M_p$ , 仅在欠阻尼情形下可被定义); 系统输出进入  $[0.98, 1.02]$  内的时间 (稳定时间  $T_s$ )。

### 1.2.3 传递函数与系统稳定性的关系、比例控制器和积分控制器

在讨论稳定性之前, 需要先给平衡点的稳定性一个定义。考虑一个无输入 (不受控) 的线性时不变系统, 称  $x_f$  是系统的平衡点, 若  $x(t_0) = x_f \Rightarrow x(t) = x_f, \forall t \geq t_0$ 。由于我总可以任意平移系统的状态, 简便起见, 下文的分析中均设系统的平衡点位于  $x_f = 0$  处。对于稳定性有两种定义:

- 若平衡点  $x_f = 0$  满足  $\forall t_0, \forall \epsilon > 0, \exists \delta(t_0, \epsilon) > 0$ , 使得  $\|x(t_0)\| < \delta(t_0, \epsilon)$  则  $\forall t \geq t_0, \|x(t)\| < \epsilon$ , 此平衡点被称为是李雅普诺夫稳定的。直观上, 李雅普诺夫稳定性意味着: 如果在任意时刻  $t_0$  系统进入了平衡点的  $\delta$  邻域内, 则此后系统将永远被限制在平衡点的  $\epsilon$  邻域内。
- 在李雅普诺夫稳定的基础上, 如果平衡点还满足:  $\forall t_0, \exists \delta(t_0) > 0$ , 使得  $\|x(t_0)\| < \delta(t_0)$  则  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$ , 则称该平衡点是渐近稳定的。直观上, 渐近稳定性意味着如果在任意时刻  $t_0$  系统进入了平衡点的  $\delta$  邻域内, 则系统将最终停在平衡点上。

从上面一阶、二阶系统的分析中可以发现, 系统输出  $X(s)$  的极点位置将直接决定系统的稳定性。为了给出无输入 (不受控) 系统的稳定性, 我们可以直接研究系统传递函数 (或者说系统的冲激响应) 的极点位置。先说这是为什么: 考虑非零初始状态的系统:

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) + c_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}x(t) + \dots + c_1\frac{d}{dt}x(t) + c_0x(t) = u(t)$$

记特征多项式  $D(s) = s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \dots + c_1s + c_0$ , 系统输出的拉普拉斯变换:

$$X(s) = \frac{U(s)}{D(s)} + \frac{\#}{D(s)}$$

其中  $\#$  是由于非零初始状态引入的常数。在  $U(s) = 1$  时, 零初始状态, 但有冲激函数输入的响应  $\frac{U(s)}{D(s)}$  和非零初始状态, 但无输入的响应  $\frac{\#}{D(s)}$  有相同的极点。所以我们只需分析系统冲激响应/传递函数的极点即可。显然我们会将系统的传递函数做分式分解:

$$G(s) = \frac{N(s)}{(s-s_{p1})(s-s_{p2})\dots(s-s_{pn})} = \frac{C_{p1}}{(s-s_{p1})} + \frac{C_{p2}}{(s-s_{p2})} + \dots + \frac{C_{pn}}{(s-s_{pn})} \quad (1.36)$$

它的拉普拉斯逆变换是  $\sum_{i=1}^n C_{pi} \exp(s_i \cdot t)$ , 显然, 只有当**系统传递函数的所有极点在虚轴左侧**时, 系统在冲激响应下有  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ , 此时的无输入 (不受控) 系统是渐近稳定的。

现在我们知道, 系统的极点位置直接影响系统的稳定性和各项性能指标, 那么现在要做的就是通过在系统前面串联一个控制器来改变整个系统 (控制器与被控系统) 的传递函数, 从而使各项性能指标落到我们满意的范围内。在设计控制器之前, 我们先介绍拉普拉斯变换的终值定理, 即若  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  存在, 则有:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\tilde{f}(s) \quad (1.37)$$

这个性质可以使用拉普拉斯变换的微分性质证明:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^{\infty} \exp(-st)f(t)dt = s\tilde{f}(s) - f(0)$$

在两侧令  $s \rightarrow 0$ , 交换积分与极限的顺序就得到:

$$f(\infty) - f(0) = \lim_{s \rightarrow 0} s\tilde{f}(s) - f(0) \Rightarrow f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s\tilde{f}(s)$$

先来考虑最简单的一种控制器: 直接将参考值  $R(s)$  与输出值  $X(s)$  之差乘以常数  $K_P$  作为被控系统的输入, 这种控制称为比例控制。研究参考值为常数, 即  $r(t) = r, R(s) = \frac{r}{s}$  的情形, 系统的输出:

$$X(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}R(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \frac{r}{s}$$

误差:

$$E(s) = R(s) - X(s) = \frac{r}{s} \left( \frac{1}{1 + C(s)G(s)} \right)$$

利用终值定理, 并取  $C(s) = K_p$ :

$$e(+\infty) = r \left( \frac{1}{1 + C(s)G(s)} \right) = r \left( \frac{1}{1 + K_p G(s)} \right)$$

这是在时间无穷长时, 参考值和系统输出间的误差, 也就是所谓的稳态误差。上文中已分析过,  $n$  阶系统的传递函数通常有  $G(s) = \frac{1}{D(s)}$ ,  $D(s) = s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \dots + c_1s + c_0$ , 从而  $G(0) = \frac{1}{c_0}$ 。这意味着除非  $c_0 \rightarrow 0$ , 否则系统的稳态误差必然存在, 这是比例控制器的固有缺陷之一。为了消除这个稳态误差, 我们显然应当改变控制器的传递函数, 使  $\lim_{s \rightarrow 0} C(s) \rightarrow \infty$ , 一个自然的想法是令  $C(s) = \frac{K_I}{s}$ 。此时  $U(s) = C(s)E(s) = \frac{K_I}{s}E(s)$ , 换言之, 被控系统的输入  $u(t) = K_I \int_0^t e(\tau) d\tau$ , 因此这种控制器相当于向被控系统输入了累积的误差, 被称为积分控制器。使用积分控制器后, 系统的传函多出来一个  $\frac{1}{s}$ , 或者说系统的特征多项式被乘了  $s$ , 所以系统实际上升了一阶。以上两种控制器可以结合使用, 就得到比例-积分控制器。

### 1.2.4 根轨迹和伯德图

本小节介绍两种常见的图解法。根轨迹指的是随系统参数变化, 闭环传递函数极点 (也就是特征方程  $D(s) = 0$  的根) 在复平面上的移动轨迹。根轨迹可帮助我们调整控制器的参数 (例如, 我们往往希望所有极点中离虚轴最近的那个离开虚轴的距离尽可能远, 从而使系统收敛更快)。使用 `matlab` 或 `python` 中的 `control` 库可直接绘制根轨迹, 下文中仅列出手绘根轨迹的规则, 不做证明。

手绘根轨迹时, 简便起见, 我们总是把变化的参数  $K$  视作比例控制器的增益。换言之, 系统的闭环传函必须被改写成  $G_d(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}$  的形式, 这里的  $G(s)$  不一定是被控系统的传函, 只是一个通过  $\frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \text{原传函}$  解出来的等效传函。假设  $G(s)$  有  $m$  个零点,  $n$  个极点, 可被写成以下形式:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{(s - s_{z_1})(s - s_{z_2}) \cdots (s - s_{z_m})}{(s - s_{p_1})(s - s_{p_2}) \cdots (s - s_{p_n})}$$

可使用以下规则来粗略地绘制根轨迹:

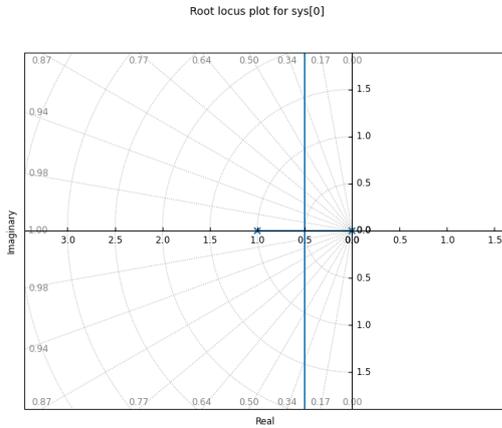
- 根轨迹在复平面上有  $\min\{m, n\}$  条分支;
- 若  $n = m$ , 则随着  $K$  从  $0$  向  $+\infty$  移动, 根轨迹总是从  $G(s)$  的极点向零点移动;
- 若  $n > m$ , 则有  $(n - m)$  条分支从极点指向无穷; 若  $n < m$ , 则有  $(m - n)$  条分支从无穷指向极点;
- 实轴上, 根轨迹在从右向左数第奇数个极点或零点的左侧出现;
- 共轭复根成对出现, 从而根轨迹关于实轴对称;
- 从无穷远处来或向无穷远处去的根轨迹将沿着渐近线移动。渐近线与实轴的交点为  $\frac{\sum s_{p_n} - s_{z_m}}{n - m}$ , 与实轴的夹角

$$\theta = \frac{2q + 1}{n - m} \pi, \quad q = \begin{cases} 0, 1, \dots, n - m - 1 & n > m \\ 0, 1, \dots, m - n - 1 & n < m \end{cases}$$

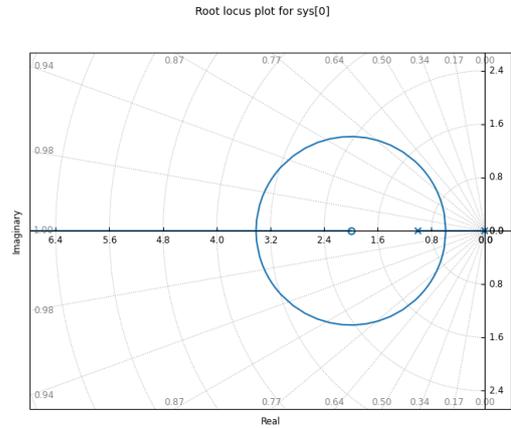
此外, 若点  $s$  在根轨迹上, 应满足  $\exists K, KG(s) = -1$ , 换言之, 需要  $\|KG(s)\| = 1$ ,  $\arg KG(s) = -(2q + 1)\pi, q = \pm 0, \pm 1, \dots$ 。显然, 无论  $\|G(s)\|$  为何值, 总可找到  $K$  使得  $\|KG(s)\| = 1$  成立。因此只需根据是否有  $\arg G(s) = -(2q + 1)\pi, q = \pm 0, \pm 1, \dots$  即可判断点  $s$  是否在根轨迹上。

下面介绍几种利用根轨迹来直观设计的控制器。考虑简单的二阶系统  $G(s) = \frac{1}{(s + 1)s}$ , 该系统的两支根轨迹分别从  $s = 0, s = 1$  出发, 分别向左、向右移动, 在  $s = -\frac{1}{2}$  处相遇, 此后沿着虚轴向上/向下移动到无穷远。因此, 系统最快的收敛速度是  $\exp\left(-\frac{1}{2}t\right)$ 。为了让系统收敛更快, 我们需要将根轨迹引向左半平面离虚轴更远处。利用根轨迹从极点出发指向零点的性质, 可以在左半平面深处放置一个零点, 例如在系统前串联  $C(s) = K_D s + K_P$ , 此时出现了新的零点  $s_{z_1} = \frac{K_P}{K_D}$ , 从而随着  $K$  的增加, 闭环传函  $\frac{C(s)G(s)}{1 + KC(s)G(s)}$  的极点将继续向左移动。由于

此时被控系统的输入是  $u(t) = K_D e'(t) + K_P e(t)$ ，因此这种控制器被称为比例-微分控制器。至此，我们集齐了所谓 PID（比例-积分-微分）控制器三幻神：比例-微分控制器负责创建新的闭环传函零点，可以将根轨迹移向左侧来加速收敛；积分控制器负责消除稳态误差。



(a) 二阶系统  $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$  的根轨迹

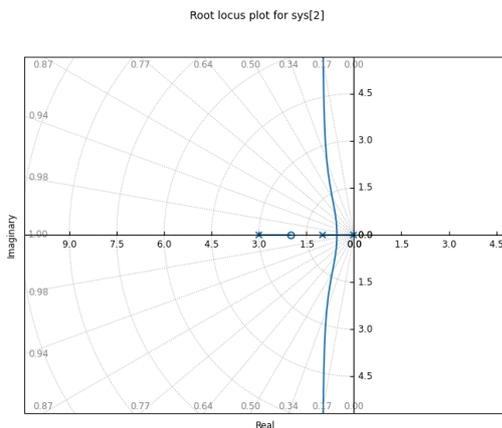


(b) 使用了比例-微分控制器  $C(s) = s + 2$  的二阶系统的根轨迹

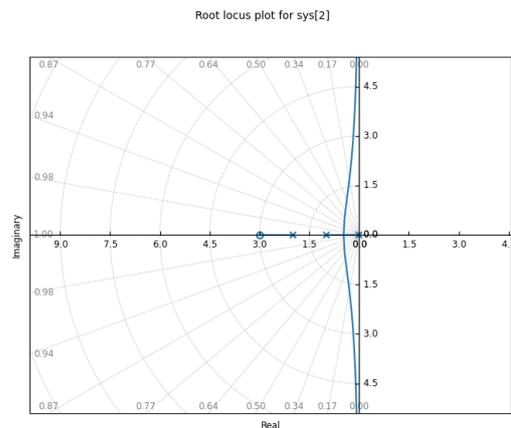
还有其他的将根轨迹尽可能左移的方法，例如所谓超前补偿器  $C(s) = \frac{s - s_{zc}}{s - s_{pc}}$ ，且  $s_{pc} < s_{zc} < 0$ 。这为系统引入了一个新的极点和一个新的零点，且新极点在新零点的左侧。此时的根轨迹有三条：一条从新极点指向新零点，另外的两条是仍然从原有的两个极点出发，沿着平行于虚轴的渐近线走向无穷远。但是此时的渐近线向左移动了，这就使得系统的收敛速度更快了。我们检查这种控制器对稳态误差造成了何种影响。容易求出系统的误差  $E(s) = \frac{R(s)}{1 + KC(s)G(s)}$ ，考虑单位阶跃输入  $R(s) = \frac{1}{s}$ ，由终值定理得到系统的稳态误差：

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{s - s_{zc}}{s - s_{pc}} K \frac{N(s)}{D(s)}} = \frac{D(0)}{D(0) + KN(0) \frac{s_{zc}}{s_{pc}}}$$

所以只使用形如  $C(s) = \frac{s - s_{zc}}{s - s_{pc}}$  的控制器必然会引入稳态误差。 $\frac{s_{zc}}{s_{pc}}$  越大，稳态误差越小。但是在  $s_{zc} < s_{pc} < 0$  时，根轨迹的渐近线就要向右移动，系统的收敛速度反而变慢了。这种控制器称为滞后补偿器。



(a) 使用了超前补偿  $C(s) = \frac{s+2}{s+3}$  的二阶系统的根轨迹

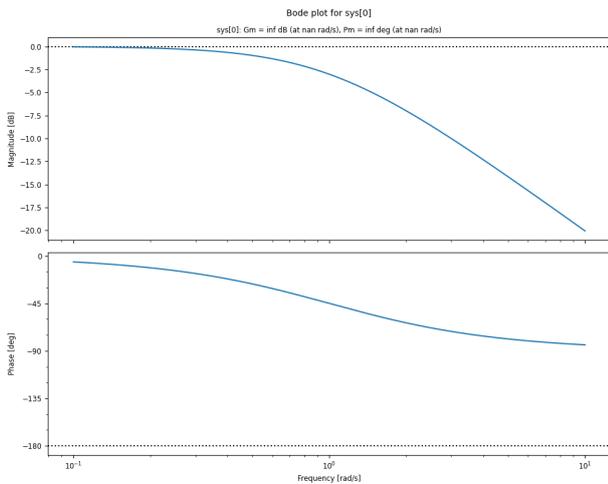


(b) 使用了滞后补偿  $C(s) = \frac{s+3}{s+2}$  的二阶系统的根轨迹

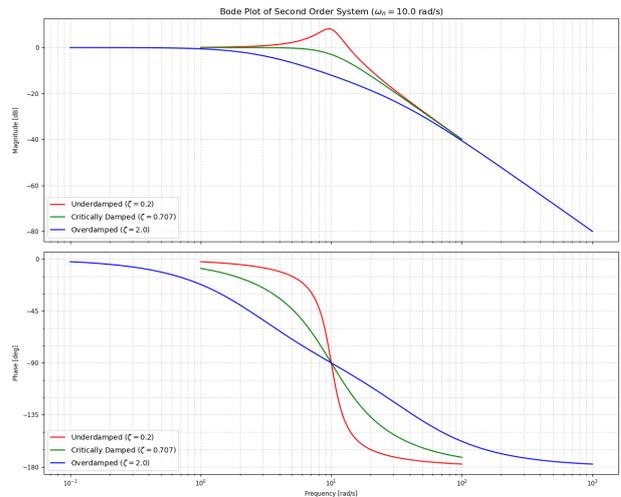
下面只考虑绝对可积信号。在傅里叶变换的章节中我们已经知道，频率为  $\omega$  的信号  $\exp(i\omega t)$  通过传函为  $G(s)$  的线性时不变系统后，振幅变化  $\|G(i\omega_i)\|$  倍，相位移动  $\arg G(i\omega_i)$ 。一些典型的例子包括：

- 一阶系统  $G(s) = \frac{a}{s+a}$ ,  $\|G(s)\| = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\omega_i}{a}\right)^2 + 1}}$ ,  $\arg G(i\omega_i) = -\arctan \frac{\omega_i}{a}$ , 可以认为这是一个低通滤波器。
- 二阶系统  $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ ,  $\|G(i\omega_i)\| = \sqrt{\frac{1}{(1-\Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2}}$ ,  $\arg G(i\omega_i) = -\arctan \frac{2\zeta\Omega}{1-\Omega^2}$ ,  $\Omega = \frac{\omega_i}{\omega_n}$ 。对于二阶系统而言, 随着输入频率  $\omega_i$  的增大,  $\|G(i\omega_i)\|$  先增大后减小。在  $\omega_i$  和  $\omega_n$  接近时,  $\|G(i\omega_i)\|$  较大。

伯德图是  $\|G(i\omega_i)\|$  和  $\arg G(i\omega_i)$  的可视化。 $\|G(i\omega_i)\|$  的纵轴计算方法是  $20 \log \|G(i\omega_i)\|$ , 其实是输出振幅与输入振幅之比取对数再乘以 20, 单位是分贝。使用对数坐标使得串联系统的伯德图可以直接叠加, 使用系数 20 是因为能量正比于振幅的平方。最后我们给出一些典型系统的伯德图。



(a) 一阶系统  $\frac{1}{s+1}$  的伯德图



(b) 二阶系统的伯德图

## 1.3 Day 3: 欲于状态空间起舞

在之前的章节(经典控制)中,信号在时间上的无穷延展使我们将其视作希尔伯特空间中无穷维的矢量,LTI系统作为正规算符对信号进行线性变换。这种处理方法使得我们忽略了信号和系统输出的时间演化信息。本节中我们将研究系统输出如何随时间演化,这意味着我们将一直在时间表象中处理问题。一般而言,LTI系统的状态演化由一阶微分方程组给出:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx + Du \quad (1.38)$$

其中  $A, B, C, D$  分别为实的  $N \times N, N \times M, P \times N, P \times M$  的矩阵;  $x$  是系统的状态,它生活在  $S = \mathbb{R}^n$  (被称作“状态空间”)中,  $u$  是输入,  $Bu$  作为  $N$  维矢量,生活在状态空间  $S$  上某点处的切空间中。 $y$  是我们通过传感器等方式观测到的系统输出。

### 1.3.1 状态空间中的稳定性判据

首先考虑无输入系统  $\dot{x} = Ax$  的稳定性。显然我们可以尝试通过选择新的基底来尝试对角化  $A$ , 这只有两个结局:

1):  $A$  可被对角化, 此时演化方程形如:

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_N \end{bmatrix} \tilde{x}$$

$\tilde{x}$  是在新基底上系统状态的分量。此时每个维度上已经解耦,要使得  $\tilde{x}$  的模长不随着时间爆炸,  $A$  的所有本征值的实部都应当位于虚轴左侧。

2): 系统不可被对角化, 此时演化方程中将出现这样的 Jordan 块:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} \tilde{x}$$

对于一个  $R \times R$  的 Jordan 块  $A$ , 有  $A^R = 0$ , 因此  $\exp(At)$  将在有限项被截断, 仍可以给出计算上述方程的解:

$$\tilde{x}(t) = \exp(At)\tilde{x}(0) = \exp(\lambda t) \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{R-1}}{(R-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{R-2}}{(R-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{t^{R-3}}{(R-3)!} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{x}(0)$$

同样地,若要求  $\tilde{x}$  的模长不爆炸,也应当令  $\lambda$  位于虚轴左侧。因此,无输入 MIMO LTI 系统的平衡状态  $x = 0$  渐近稳定的充要条件是**矩阵  $A$  的本征值全部位于虚轴左侧**,这种判据称为李雅普诺夫第一判据。

还有一种非常直观的稳定性判据(第二判据):若存在具有连续一阶导数的标量场  $V(x)$ ,使得  $V(0) = 0$ ,且  $\forall x \neq 0$  有: 1)  $V(x)$  正定; 2)  $\dot{V}(x)$  负定; 3)  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) \rightarrow \infty$ ,则系统的平衡状态  $x = 0$  是渐近稳定的。直观上,我们为系统构造了能量  $V(x)$ ,它沿着轨迹单调下降且有下界,因此系统最终必将停止在能量最低点处。一般而言,  $\dot{V}(x)$  负定的能量函数不易构造,我们常使用放松后的第二判据:  $\forall x \neq 0$ , 1)  $V(x)$  正定; 2)  $\dot{V}(x)$  半负定; 3)  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) \rightarrow \infty$ ; 4) 考虑集合  $\{x | \dot{V}(x) = 0\}$ , 集合中除了  $x(t) = 0$  这一平凡轨迹外,不包含任何其他完整轨迹。这里我们修改了条件 2) 为半负定,同时增补了条件 4)。

稍举一例来说明如何理解放松后的第二判据。考虑系统：

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = -x_1 - (1 + x_2)^2 x_2$$

取能量函数  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ ，则  $\dot{V}(x) = -2x_2^2(1 + x_2)^2$  半负定。 $\dot{V}(x)$  有两条“山谷”： $x_2 = 0$  和  $x_2 = -1$ ，我们应确保不可能有轨迹沿着这两条“山谷”前进。考察轨迹  $x(t) = [x_1(t), 0]^T$ ，由  $\dot{x}_2 = 0$  给出  $x_1 = 0$ ，从而不可能有  $x(t) = [x_1(t) \neq 0, 0]^T$  这样的轨迹。对于另一边可类似分析。因此根据放松后的第二判据，仍可判断  $x = 0$  是渐近稳定的。

李雅普诺夫第一判据是只能对 LTI 系统使用的判据（如果要对非线性系统使用，可以在平衡点附近对非线性系统进行线性化），而第二判据则可对任意系统使用，下面对 LTI 系统证明二者的等价性。先证明第二判据能推出第一判据：对于 LTI 系统而言，最简单的正定函数构造方式是取正定矩  $P$ ，构造  $V(x) = x^T P x$ ，那么  $\dot{V}(x) = x^T (A^T P + P A)x$ ，第二判据告诉我们，只要存在正定矩阵  $P$ ，使得  $Q = -A^T P + P A$  也正定，则平衡点必渐近稳定，应证明这个条件能推出  $A$  的本征值实部均为负数。两侧乘以  $A$  的本征矢  $v$ ：

$$v^\dagger (A^T P + P A)v = -v^\dagger Q v$$

注意这里  $A$  是实矩阵，从而：

$$(Av)^\dagger P v + P(Av) = -v^\dagger Q v \Rightarrow (\lambda^* + \lambda)(v^\dagger P v) = -v^\dagger Q v \Rightarrow 2\text{Re}(\lambda) = -\frac{v^\dagger P v}{v^\dagger Q v}$$

由于  $P, Q$  均正定，立刻推出  $A$  的本征值实部为负，这就得到了第一判据。再证明第一判据能推出第二判据：若  $A$  的本征值全为负，取正定矩阵  $Q$ ，令  $P = \int_0^\infty \exp(A^T t) Q \exp(At) dt$ ，直接计算：

$$\begin{aligned} A^T P + P A &= A^T \left( \int_0^\infty \exp(A^T t) Q \exp(At) dt \right) + \left( \int_0^\infty \exp(A^T t) Q \exp(At) dt \right) A \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt} (\exp(A^T t) Q \exp(At)) dt = -Q \end{aligned}$$

这就得到了第二判据。从而我们完成了（LTI 系统中）两个判据等价性的证明。

还有一个非常神奇的地方：在经典控制理论中，我们使用传函的极点判断平衡点稳定性，渐近稳定的判据是所有极点均在虚轴左侧。这个判据和我们现在给出的  $A$  的本征值判据非常相似，二者之间是否有联系呢？为此，我们需要先将经典控制中使用传函描述的系统转换成状态空间模型。设一个 SISO LTI 系统的传函是：

$$G(s) = \frac{N(s) s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s^1 + b_0}{D(s) s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s^1 + a_0}$$

且分子分母已无公因式可以提出。这个系统应该被拆成系统本身（对应状态空间模型中的  $\dot{x} = Ax + Bu$ ）和输出方程（对应状态空间模型中的  $y = Cx + Du$ ）的串联，系统本身是：

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = u(t)$$

它的传函是  $\frac{1}{D(s)}$ ，而输出方程是：

$$y = \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0 x$$

它的传函是  $N(s)$ 。考虑取状态变量  $z_0 = x, z_1 = \frac{dx}{dt}, \cdots, z_{n-1} = \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}$ ， $z = [z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}]$ ，系统的状态空间模型是：

$$\frac{d}{dt} z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

现在要求  $A$  矩阵的本征值，我们以  $A$  矩阵的行（列）数为奇数的情况作为例子来看。考虑矩阵  $A - \lambda I$ ：

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} - \lambda \end{bmatrix}$$

对最后一行展开来获得其行列式。对  $-a_0$  展开时，消去  $a_0$  所在的行列，剩下的矩阵是三对角矩阵，对角全为  $+1$ ，因此在本征多项式中贡献  $-a_0$ ；对  $-a_1$  展开时，有一个  $-\lambda$  进入对角线，因此在本征多项式中贡献  $-a_1 \cdot (-1) \cdot (-\lambda) = -\lambda a_1$ ， $\cdots$  直到计算出最后一项的贡献是  $-\lambda^{n-1} a_{n-1} - \lambda^n$ ，因此矩阵  $A$  的本征多项式是：

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

因此  $A$  矩阵的本征值就是传递函数的极点。这样，适用于 MIMO 系统的李雅普诺夫第一判据就与适用于 SISO 系统的极点位置判据一致了！

### 1.3.2 系统的可控性与可观性

可控性是判断我们有多大自由度来改变系统状态的性质；可观性则是判断我们能否通过观测一段时间内系统的输出  $y(t)$  来确定系统初始条件的性质。首先我们研究可控性。最基本的可控性的定义是从某状态到某状态的可控性：若某一系统存在控制律  $u(t), t \in [0, T]$ ，使得该系统能从初始状态  $x(0) = x_A$  转移到终末状态  $x(T) = x_B$ ，则称系统具有  $x_A \rightarrow x_B$  可控性。显然，我们非常迫切地想知道的事情是：对于  $\forall x_A, x_B \in \mathcal{S}$ ，系统是否都有  $x_A \rightarrow x_B$  的可控性呢（下文简称为任意可控性）？对于 LTI 系统而言，这个复杂的问题被简化：只要系统有  $0 \rightarrow x_B, \forall x_B \in \mathcal{S}$  的可控性，则系统有任意可控性。这是因为对于 LTI 系统有：

$$x(t) = \exp(At)x(0) + \int_0^t \exp[A(T-\tau)]Bu(\tau)d\tau$$

系统有  $0 \rightarrow x_B, \forall x_B \in \mathcal{S}$  的可控性意味着  $\forall x_B \in \mathcal{S}, \exists u(t), t \in [0, T]$  使得  $\int_0^T \exp[A(T-\tau)]Bu(\tau)d\tau = x_B$ 。将  $x_B$  换成  $x_B - x_A \exp(AT)$ ，就证明了系统的任意可控性。因此，研究 LTI 系统是否有任意可控性的问题归结为是否存在输入  $u(t)$  将零初始状态的系统移动到任意状态的问题。直观上来看， $\int_0^T \exp[A(T-\tau)]Bu(\tau)d\tau$  这个东西其实是不同时间上  $\exp[A(T-\tau)]Bu(\tau)$  的线性组合，因此我可以不同时间点上的输入分别将系统推向  $\mathcal{S}$  中不同的方向，只要最终所有时间点上的移动能够覆盖  $\mathcal{S}$  中  $N$  个独立的方向即可。因此，考虑  $\mathcal{S}$  的子空间：

$$\mathcal{C} = \text{span} \left\{ \bigcup_{t \in [0, T]} \text{Img}[\exp(At)B] \right\}$$

这是能够覆盖不同时间点上  $\exp(At)B$  的像空间的最小子空间，也就是通过任意调整各时间点上的输入  $u(t)$ ，系统状态所能达到的区域。下面我们将证明：

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_M = \text{Img}\{[B, AB, A^2B, \cdots, A^{N-1}B]\} \quad (1.39)$$

先证明  $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_M$ 。 $\mathcal{C}$  中任意矢量可表示为  $\exp(At)Bv, t \in [0, T], v \in \mathbb{R}^M$ ，由哈密顿-凯莱定理， $\exp(At)$  的无穷级数可以被截断：

$$\exp(At)Bv = [\alpha_0(t)B + \alpha_1(t)AB + \cdots + \alpha_{N-1}(t)A^{N-1}B]v$$

取  $w = [\alpha_0(t)v^T, \alpha_1(t)v^T, \cdots, \alpha_{N-1}(t)v^T]^T$ ，立刻有： $w = \exp(At)Bv$ ，证明完成。再证明  $\mathcal{C}_M \subset \mathcal{C}$ ，直接研究这两个子空间比较困难，不如研究它们的正交补，转而证明  $\mathcal{C}^\perp \subset \mathcal{C}_M^\perp$ 。 $z \in \mathcal{C}^\perp$  应与  $\mathcal{C}$  中所有矢量正交，也就是说  $z^T(\exp(At)Bx) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^M, t \in [0, T]$ ，从而  $z^T(\exp(At)B) = 0, \forall t \in [0, T]$ 。令  $g(t) = z^T(\exp(At)B)$ ，由  $g(0) = 0, g'(0) = 0, g''(0) = 0, \cdots, g^{(n-1)}(0) = 0$  得到  $z^T B = z^T AB = z^T A^2 B = \cdots = z^T A^{n-1} B = 0$ ，从而  $z \in \mathcal{C}_M^\perp$ ，证明完成。结合以上两段证明，我们就得到了  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_M$ ，这给出了判断 LTI 系统是否有任意能控性的重要判据（秩判据）：LTI 系统有任意能控性的充要条件是：

$$\text{rank}\{[B, AB, A^2B, \cdots, A^{N-1}B]\} = N \quad (1.40)$$

除了秩判据之外，另一个常用判据是格拉姆判据，它指出  $C = \text{Img}[W]$ ，其中

$$W = \int_0^T \exp(-At)BB^T \exp(-A^T t)dt \quad (1.41)$$

要证明这一点，我们仍然直接考察正交补，试图证明  $(\text{Img}[W])^\perp = C_M^\perp$ 。仍然先证明  $(\text{Img}[W])^\perp \subset C_M^\perp$ ，取  $w \in (\text{Img}[W])^\perp$ ，必然有：

$$w^T \left( \int_0^T \exp(-At)BB^T \exp(-A^T t)dt \right) w = 0$$

从而：

$$\int_0^T \|w^T \exp(-At)B\|^2 dt = 0 \Rightarrow \|w^T \exp(-At)B\|^2 = 0, \forall t \in [0, T]$$

所以又得到了  $g(t) = w^T \exp(-At)B = 0$ ，利用其各阶导数为 0 即可完成证明。反过来的证明  $C_M^\perp \in (\text{Img}[W])^\perp$  是显然的，利用哈密顿凯莱定理即可证明。

一个神奇的事情是，能控性和时间  $T$  无关。尽管你可以说这是时不变系统的功劳，但是这仍然说明了在能控性的研究中，轨迹不是最基本的，轨迹的初速度/生成元才是最基本的。系统的演化方程  $\dot{x} = Ax + Bu$  告诉我们，我们被允许前进的方向是  $Ax$  和  $B$  的各个列  $b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(M)}$ ，但是这并不意味着我们只能向着这些方向走，我们将利用沿着两个矢量场移动的不对易性来找到新的方向。不妨设流形  $M$  上有矢量场  $X^a, Y^a$ ，分别考察“先沿着  $X^a$  走一小段距离，再沿着  $Y^a$  走一小段距离”和“先沿着  $Y^a$  走一小段距离，再沿着  $X^a$  走一小段距离”之间有何区别：计算通过两种移动方式移动后得到的点上，某个标量场  $f$  的差之：

$$\begin{aligned} & \left[ \left( 1 + sX^a \nabla_a + \frac{1}{2}s^2 X^a \nabla_a X^b \nabla_b \right) \left( 1 + tY^c \nabla_c + \frac{1}{2}s^2 Y^c \nabla_c Y^d \nabla_d \right) - (\dots)(\dots) \right] f \\ &= sX^a \nabla_a (Y^c \nabla_c f) - tY^c \nabla_c (X^a \nabla_a f) \\ &= stX^a (\nabla_a Y^c) \nabla_c f + stX^a Y^c \nabla_a \nabla_c f - stY^c (\nabla_c X^a) \nabla_a f - stY^c X^a \nabla_c \nabla_a f \\ &= st[X^a (\nabla_a Y^c) \nabla_c - Y^c (\nabla_c X^a) \nabla_a] f \\ &= st[X^c \nabla_c Y^a - Y^c \nabla_a X^a] \nabla_a f \\ &= st[X, Y]^a \nabla_a f \end{aligned}$$

其中  $\nabla_a$  是任一挠联络（这里已使用标量场的李导数的性质： $\mathcal{L}_X f = X^a \nabla_a f$ ）。所以沿着两个矢量场移动的不对易性应当使用李括号衡量。李括号可以用于生成新的移动方向。直观来看，系统的局部可达性（定义为对于  $\forall x_0 \in \mathcal{S}$  处出发的系统，存在控制律将其移动到  $x_0$  邻域内  $N$  维开集）与包含了所有用于移动系统的矢量场（例如 LTI 系统的  $Ax$  和  $b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(M)}$ ）的最小李代数的维度有关，这个李代数的维度为  $N$  是局部可达性存在的充要条件。对于 LTI 系统而言，系统的局部可达性等价于全局可达性，而全局可达性又等价于任意可控性，所以这个李代数的维度就是任意可控性的判据。考虑：

$$\begin{aligned} [Ax, b^{(i)}] &= (Ax \cdot \nabla)b^{(i)} - (b^{(i)} \cdot \nabla)(Ax) \\ &= 0 - Ab^{(i)} = -Ab^{(i)} \\ [Ax, [Ax, b^{(i)}]] &= [Ax, -Ab^{(i)}] = (Ax \cdot \nabla)(-Ab^{(i)}) - (-Ab^{(i)} \cdot \nabla)(Ax) \\ &= 0 - (-Ab^{(i)} \cdot A) = A^2 b^{(i)} \\ &\dots \end{aligned}$$

因此，这个李代数的维度就是  $\text{rank}\{[B, AB, A^2 B, \dots, A^{N-1} B]\}$ ，我们重新得到了之前的秩判据。

下面研究可观测性。首先需要定义状态的不可区分性：对于某一系统中的两个初始状态  $x_1, x_2$ ，在任意控制律  $u(t)$  下，系统的输出  $y(t)$  完全相同，则称状态  $x_1, x_2$  是不可区分的。定义系统的局部能观性： $\forall x_0 \in \mathcal{S}$ ，在其去心邻域内没有与其不可区分的状态，则称系统是局部能观的，类似地可定义全局能观。对于 LTI 系统，能观性的研究可以简化，从  $x_1, x_2$  出发的轨迹之差是：

$$y(t) = C \exp(At)(x_A - x_B) + \int_0^T C \exp(A(T - \tau))Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

因此能否区分两个初始状态只与  $x_A - x_B$  是否处在  $\forall t \in [0, T], C \exp(At)$  的零空间中有关。考虑

$$\bar{\mathcal{O}} = \left\{ \bigcap_{t \in [0, T]} \text{Ker}[C \exp(At)] \right\}$$

若  $\mathcal{O}$  维度为 0, 则 LTI 系统是全局能观的。所以 LTI 系统的能观性可直观表述成: 在已知  $u(t), y(t), t \in [0, T]$  和  $A, B, C, D$  的情况下, 可唯一确定系统的初始状态  $x(0)$ 。下面我们将证明:

$$\bar{\mathcal{O}} = \bar{\mathcal{O}}_M = \text{Ker} \left\{ \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \right\} \quad (1.42)$$

首先取  $v \in \bar{\mathcal{O}}$  使得  $C \exp(At)v = 0, \forall t \in [0, T]$ , 可得  $Cv = 0, CAv = 0, CA^2v = 0, \dots, CA^{n-1}v = 0$ , 从而立刻得到  $v \in \bar{\mathcal{O}}_M$ , 从而  $\bar{\mathcal{O}} \subset \bar{\mathcal{O}}_M$ ; 反过来的证明是类似的。因此, LTI 系统全局能观的条件是:

$$\text{rank} \left\{ \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \right\} = N \quad (1.43)$$

怎么理解一般情况下的能观条件呢? 简单起见, 我们只考虑无输入系统。我们知道了一段时间  $[0, T]$  内的轨迹, 也就是知道了观测量 (例如 LTI 系统中的  $y$ ) 在  $t = 0$  时的各阶导数, 具体来说沿着漂移矢量场 (例如 LTI 系统中的  $Ax$ ) 诱导的单参微分同胚群的对观测量的各阶李导数  $\mathcal{L}_x^{(k)}y(x(t))$ 。通过观测映射  $y(x)$  本身和对观测映射的  $1, \dots, r-1$  阶李导数, 我们创建了从状态空间  $\mathcal{S}$  到  $P \times r$  维空间  $\mathcal{O}$  ( $P$  同上文, 是观测量的数目) 的映射  $\Phi$ , 系统局部能观的条件是对任意  $x \in \mathcal{S}$ ,  $\Phi$  诱导的推前映射  $\Phi_*: TS_x \rightarrow T\mathcal{O}_{\Phi(x)}$  是单射 (直观来看, 这意味着状态空间  $\mathcal{S}$  中  $x$  邻域中任意方向的移动都可以在观测空间  $\mathcal{O}$  中被捕捉到), 这要求映射  $\Phi$  的雅可比矩阵的秩为  $N$ 。非常容易看出这个条件能回退到前面 LTI 系统全局能观的条件。

上文中我们讨论了 LTI 系统的能控子空间  $\mathcal{C}$  和不能观子空间  $\bar{\mathcal{O}}$ , 显然可对状态空间进行分解。所谓能控分解是选择一组合适的基底, 将系统的演化方程写成如下形式:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{cc} & A_{c\bar{c}} \\ 0 & A_{\bar{c}\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_c \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (1.44)$$

能做出这个分解的原因是能控子空间在  $A$  的作用下封闭, 由哈密顿凯莱定理, 这是显然的。所谓能观分解是:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_{\bar{o}} \\ x_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\bar{o}\bar{o}} & A_{\bar{o}o} \\ 0 & A_{oo} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\bar{o}} \\ x_o \end{bmatrix} + Bu \quad y = \begin{bmatrix} 0 & C_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\bar{o}} \\ x_o \end{bmatrix} + D \quad (1.45)$$

能这样分解的原因是不能观子空间在  $A$  的作用下封闭, 这也是显然的。这两个分解说明: 不能控子空间会影响能控子空间, 反之则不行, 控制律只能影响能控子空间; 能观子空间会影响不能观子空间, 反之则不行, 只有能观子空间中的状态演化才会被观测。

### 1.3.3 控制器与观测器的设计

下面介绍一些反馈控制器的设计方法。一般而言反馈控制有三种设计方法:

1. 状态反馈: 引入反馈矩阵  $K$  和参考矢量  $v$ , 使得系统的动力学方程变成  $\dot{x} = Ax + B(v - Kx)$
2. 输出直接反馈到演化方程: 引入反馈矩阵  $H$ , 使得动力学方程变成  $\dot{x} = Ax + Bu - HCx$
3. 输出反馈到控制量: 引入反馈矩阵  $F$  和参考矢量  $v$ , 使得动力学方程变成  $\dot{x} = Ax + B(v - FCx)$

下面考察这几种反馈控制的设计方式对系统特性的影响: 先证明方式 1) 不改变系统的能控性: 可发现  $BKB$  的各列是对  $B$  的各列做线性组合得到的, 从而  $(A - BK)B$  各列可由  $\{B, AB\}$  各列组合得到。设  $(A - BK)^i B$  中

的每一列可由  $\{B, AB, \dots, A^i B\}$  各列按如下方式组合得到:

$$(A - BK)^i B = A^i B + \sum_{j=0}^{i-1} A^j B P_{i,j}$$

其中  $P_{i,j}$  是矩阵, 则考虑:

$$\begin{aligned} (A - BK)^{i+1} &= (A - BK)(A - BK)^i \\ &= (A - BK) \left( A^i B + \sum_{j=0}^{i-1} A^j B P_{i,j} \right) \\ &= A^{i+1} B - BK A^i B + \sum_{j=1}^i A^j B P_{i,j} - BK \left( \sum_{j=0}^{i-1} A^j B P_{i,j} \right) \end{aligned}$$

这里第二项是  $B$  的各列的线性组合, 第三项是  $A^j B, j = 1, \dots, i$  的各列的线性组合, 第四项是  $B$  的各列的线性组合, 因此我们证明了  $(A - BK)^{i+1} B$  各列可由  $\{B, AB, \dots, A^{i+1} B\}$  中各列线性组合得到。从而矩阵  $[B, (A - BK)B, \dots, (A - BK)^{N-1} B]$  可通过将矩阵  $[B, AB, \dots, A^{N-1} B]$  右乘一个分块上三角阵得到, 这个上三角阵的对角块全部是单位阵, 所以它是满秩的。所以矩阵  $[B, (A - BK)B, \dots, (A - BK)^{N-1} B]$  的秩和矩阵  $[B, AB, \dots, A^{N-1} B]$  的秩相同。再证明方式 2) 不改变系统的能观性。证明是类似的: 先设

$$C(A - HC)^i = CA^i + \sum_{j=0}^{i-1} P_{i,j} CA^j$$

这意味着  $C(A - HC)^i$  的各行可按上述形式可以写成  $\{C, CA, \dots, CA^i\}$  中各行的线性组合。考虑:

$$\begin{aligned} C(A - HC)^{i+1} &= C(A - HC)^i (A - HC) \\ &= \left( CA^i + \sum_{j=0}^{i-1} P_{i,j} CA^j \right) (A - HC) \\ &= CA^{i+1} + CA^i HC + \sum_{j=1}^i P_{i,j} CA^j + \left( \sum_{j=0}^{i-1} P_{i,j} CA^j \right) HC \end{aligned}$$

这里第三项是  $CA^j, j = 1, \dots, i$  各行的线性组合, 第二项和第四项是  $C$  的各行的线性组合。从而我们证明了  $C(A - HC)^{i+1}$  的各行可以写成  $\{C, CA, \dots, CA^{i+1}\}$  中各行的线性组合, 从而新系统的能观性矩阵可通过将旧系统的能观性矩阵左乘一个上三角矩阵得到, 从而两个能观性矩阵的秩相同。对于方式 3), 它既是方式 1) 的特例 ( $K = FC$ ), 又是方式 2) 的特例 ( $H = BF$ ), 因此它既不改变系统的能观性, 又不改变系统的能控性。

极点配置定理指出: 对于状态反馈控制器  $\dot{x} = Ax + B(v - Kx)$ , 只要系统完全能控, 则总可通过选择合适的  $K$  来任意移动系统极点。首先我们对 SISO 系统证明: 考虑系统  $\dot{x} = Ax + Bu$ , 其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

取  $K = [k_0 \quad k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_{n-1}]$ , 从而:

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 - k_0 & -a_1 - k_1 & -a_2 - k_2 & \cdots & -a_{n-1} - k_{n-1} \end{bmatrix}$$

最下面这一行仍然是特征多项式中的系数, 既然我们能任意调整特征多项式的系数, 自然可以任意指定特征

多项式的根（也就是任意移动系统极点）。接下来对 MIMO 系统证明，我们将为 MIMO 系统构造一个等效的、可控的 SISO 系统：考虑  $\dot{x} = Ax + Bu$ ，将  $B$  的列记为  $b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(M)}$ 。按照顺序检查各个矢量的线性无关性： $b^{(1)}, Ab^{(1)}, A^2b^{(1)}, \dots, A^{(N-1)}b^{(1)}$ ，不断地将与前面的矢量线性无关的矢量加入集合，直到找到与之前矢量线性相关的  $A^{n_1}b^{(1)}$ （我们跳过它），此时集合中有  $\{b^{(1)}, Ab^{(1)}, A^2b^{(1)}, \dots, A^{(n_1-1)}b^{(1)}\}$ ；继续检查下面各个矢量的线性无关性： $b^{(2)}, Ab^{(2)}, A^2b^{(2)}, \dots, A^{(N-1)}b^{(2)}$ ，不断将与之前矢量线性无关的矢量加入集合，直到遇到线性相关的矢量  $A^{n_2}b^{(2)}$ （仍然跳过它），此时集合中有  $\{b^{(1)}, Ab^{(1)}, \dots, A^{(n_1-1)}b^{(1)}, b^{(2)}, Ab^{(2)}, \dots, A^{(n_2-1)}b^{(2)}\}$ ，不断重复这个过程直到遍历  $B$  的每一列，最终集合中将包含  $N$  个线性无关的矢量。现在我们要考虑取矩阵  $F$ ，使得  $(A - BF)$  不断作用在  $b^{(1)}$  上就能生成集合中所有线性无关矢量，这可以通过指定

$$F(A^{n_i-1}b^{(i)}) = e_{i+1},$$

其余情况为 0 来实现，其中  $e_{i+1}$  代表仅在  $i+1$  位置上不为 0 的单位矢量。从而我们构造了与 MIMO 系统等效的能控的 SISO 系统，可以为其任意配置极点，配置极点后的系统是：

$$\dot{x} = (A - BF - b^{(1)}\tilde{K})x + b^{(1)}v$$

其中  $\tilde{K} = [k_0 \ k_1 \ k_2 \ \dots \ k_{n-1}]$ 。所以对于原来的 MIMO 系统，选择的反馈矩阵应当是  $K = F - e_1\tilde{K}$ ，这样就实现了极点的任意配置。

最后介绍观测器：我们有时会对系统进行“数字孪生”，这意味着我们有一个在现实世界中运行的真系统  $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$ ，我们将为之在计算机中创建一个副本  $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu, \hat{y} = C\hat{x}$ 。这里的  $A, B, C$  都已知。然而，两个系统的初始状态有可能设置得不一致，导致两个系统的后续演化也不同。为了消除这种不一致性，我们在系统副本中加入反馈：

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - H(\hat{y} - y) \quad (1.46)$$

这种观测器被称为龙伯格观测器。计算可知：

$$\frac{d}{dt}(x - \hat{x}) = (A - HC)(x - \hat{x})$$

所以通过配置  $A - HC$  的本征值在虚轴左侧，我们可以使真的系统与副本之间的误差逐渐缩小。

## 1.4 Day 4: 弱水三千取一瓢

大自然说它想最小化  $S = -\frac{1}{4} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} dx$ , 于是就有了光。众所周知, 从学习理论力学这门学科开始, 我们“给出一个系统动力学方程”的方法就发生了变化: 相比于直接写出 ODEs, 我们更倾向于找到在系统对称变换下保持不变的, 系统运动轨迹  $x(t), t \in [t_0, t_f]$  的标量泛函, “最小化该泛函”这一变分问题的解就是系统的动力学方程。Day 2 和 Day 3 中已经讨论了分析 LTI 系统性态的各种方法, 现在我们将讨论泛函求极值的相关内容。本节中我们将抛弃通过权衡极点位置、超调量、稳定时间等指标来粗略设计控制器的方法, 而是直接计算使得某性能指标最小化的开环/闭环控制律。

**【阅读提示】**为了偷懒, 本节涉及矩阵与向量、向量与向量的乘法时, 大量使用了  $\cdot$  符号。阅读时请根据维数和上下文自行脑补哪个向量/矩阵需要转置  $T$ 。

### 1.4.1 控制律无约束的最优控制: 乘子法和标准变分法

首先考虑一类微分约束的泛函极值问题: 设有连续可微的状态变量  $x(t) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^N$ , 满足  $x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f$ , 满足约束  $F(x(t), \dot{x}(t), t) = 0$ , 希望最小化性能指标  $J[x] = \int_{t_0}^{t_f} g(x, \dot{x}, t) dt$ 。对于这样的问题, 我们可以直接使用拉格朗日乘子法处理微分约束, 即构造增广的性能指标:

$$\bar{J}[x, p] = \int_{t_0}^{t_f} [g(x, \dot{x}, t) + p(t) \cdot F(x, \dot{x}, t)] dt$$

为什么可以直接这样做? 是因为这个泛函极值问题可以视作无穷维优化问题, 不妨将时间等分作  $t_0, t_1, \dots, t_{N-1}, t_N = t_f$ , 则该问题的决策变量变成在各个分点上的  $x(t)$  值  $x_0 = x(t_0), x_1 = x(t_1), \dots, x_N = x(t_N)$ ,  $\dot{x}_i = \dot{x}(t_i)$  可以使用差分逼近, 即取  $\dot{x}_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t}, i = 0, 1, \dots, N-1, \Delta t = t_{i+1} - t_i$ , 这样  $\dot{x}_N$  是未定义的, 但是你完全可以直接取  $\dot{x}_N = 0$ , 随着  $\Delta t \rightarrow 0$ , 在有限个点上对  $\dot{x}_i$  的不正确逼近对性能指标/目标函数带来的影响将消失。离散化后, 我们得到优化问题:

$$\min J(\{x_i\}) = \sum_{i=0}^{N-1} g(x_i, \dot{x}_i, t_i) \Delta t, \quad \text{s.t. } F(x_i, \dot{x}_i, t_i) = 0 \quad i = 0, 1, \dots, N$$

我使用每个区间的左端点乘以区间长度来逼近积分结果, 此时  $x_N, \dot{x}_N$  根本不出现在性能指标中, 真正在起效的决策变量只有  $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$ , 真正在起效的约束也只有  $N+1$  个中的前  $N$  个。我们已知这个有限维的优化问题可以使用拉格朗日乘子法解决: 引入乘子  $p_0, p_1, \dots, p_{N-1}$ , 令增广的拉格朗日函数为:

$$\bar{J}(\{x_i\}, \{p_i\}) = \sum_{i=0}^{N-1} [g(x_i, \dot{x}_i, t_i) + p_i \cdot F(x_i, \dot{x}_i, t_i)] \Delta t$$

令  $N \rightarrow \infty$  或者说  $\Delta t = 0$ , 这个增广拉格朗日函数就变成上面的增广拉格朗日泛函  $\bar{J}[x, p]$ 。要使得增广泛函取极小值, 应满足关于  $x(t)$  和  $p(t)$  的 E-L 方程, 令  $\bar{g}(x, \dot{x}, p, t) = g(x(t), \dot{x}(t), t) + p(t) \cdot F(x(t), \dot{x}(t), t)$ , E-L 方程给出:

$$0 = \frac{\partial \bar{g}(x, \dot{x}, p, t)}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{g}(x, \dot{x}, p, t)}{\partial \dot{x}} \right), \quad 0 = F(x, \dot{x}, t) \quad (1.47)$$

从离散化后的有限维优化问题中也可读出这个结果。令  $\bar{g}(x_i, \dot{x}_i, p_i, t_i) = g(x_i, \dot{x}_i, t_i) + p_i \cdot F(x_i, \dot{x}_i, t_i)$ , 则:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(\{x_i\}, \{p_i\})}{\partial x_i} &= \frac{\partial \bar{g}(x_i, \dot{x}_i, p_i, t_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{g}(x_i, \dot{x}_i, p_i, t_i)}{\partial x_{i-1}} \\ &= \frac{\partial \bar{g}(x_i, \dot{x}_i, p_i, t_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{g}(x_i, \dot{x}_i, p_i, t_i)}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{g}(x_{i-1}, \dot{x}_{i-1}, p_{i-1}, t_{i-1})}{\partial \dot{x}_{i-1}} \frac{\partial \dot{x}_{i-1}}{\partial x_{i-1}} \\ &= \frac{\partial \bar{g}(x_i, \dot{x}_i, p_i, t_i)}{\partial x_i} - \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{\partial \bar{g}(x_i, \dot{x}_i, p_i, t_i)}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial \bar{g}(x_{i-1}, \dot{x}_{i-1}, p_{i-1}, t_{i-1})}{\partial \dot{x}_{i-1}} \right) = 0 \\ \frac{\partial J(\{x_i\}, \{p_i\})}{\partial p_i} &= F(x_i, \dot{x}_i, t_i) = 0 \end{aligned}$$

这样, 我们为直接使用拉格朗日乘子法求解最优控制问题提供了合法性。接下来我们看最简单的最优控制问题: 考虑状态变量  $x(t) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^N$ , 控制变量  $u(t) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^M$  均无约束。状态变量满足边界条件  $x(t_0) =$

$x_0, x(t_f) = x_f$ , 系统的动力学方程  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ , 性能指标  $J[u] = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt$ , 方便起见引入  $\mathcal{H}(x(t), u(t), p(t), t) = g(x(t), u(t), t) + p(t) \cdot f(x(t), u(t), t)$  (我们暂且将其称为哈密顿量, 下文中将反复使用), 可得以下必要条件:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{H}(x, u, p, t)}{\partial u}, \quad \dot{x}(t) = + \frac{\partial \mathcal{H}(x, u, p, t)}{\partial p}, \quad \dot{p}(t) = - \frac{\partial \mathcal{H}(x, u, p, t)}{\partial x} \quad (1.48)$$

很多问题可以转换成有微分约束的泛函极值问题处理, 例如一类有积分约束的极值问题 (e.g. 等周问题): 有状态变量  $x(t) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , 边界条件  $x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f$ , 有约束  $\int_{t_0}^{t_f} b(x, \dot{x}, t) dt = B$ , 仍然最小化  $J[x] = \int_{t_0}^{t_f} g(x, \dot{x}, t) dt$ , 显然我们需要将积分约束换成微分约束, 引入新的变量:

$$z(t) = \int_{t_0}^t b(x(\tau), \dot{x}(\tau), \tau) d\tau \Rightarrow \dot{z}(t) = b(x(t), \dot{x}(t), t)$$

从而该问题立刻转换为有微分约束的问题, 可使用上述方法处理。注意到此时  $\mathcal{H}$  中不显含  $z$  的, 因此与  $z$  对应的拉格朗日乘子  $p(t) = \text{Const} = p_0$ 。

下面考虑终端状态不固定的情形, 也就是说我们不再把终端状态限制在一点  $x(t_f) = x_f$ , 而是允许系统落在某个目标集  $\mathcal{S} = \{x(t_f) : m(x(t_f), t_f) = 0\}$  中。系统的性能指标为  $J(x) = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x, \dot{x}, t) dt$ , 我们可以直接将对终端状态和时间的约束使用拉格朗日乘子引入, 即令  $\bar{J} = J + \lambda \cdot m(x(t_f), t_f)$ , 对  $\bar{J}$  进行变分, 注意此时对终端时间和终端状态也要变分:

$$\begin{aligned} \delta \bar{J} &= \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \delta x_f + \frac{\partial h}{\partial t} \delta t_f + m \cdot \delta \lambda + \lambda \cdot \left[ \frac{\partial m}{\partial x} \cdot \delta x_f + \frac{\partial m}{\partial t} \delta t_f \right] + \int_{t_0}^{t_f} \left[ \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \delta x(t) + \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right] dt + g \delta t_f \\ &= \left[ g + \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial t} \right] \delta t_f + \left[ \frac{\partial h}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial m}{\partial x} \right] \cdot \delta x_f + m \cdot \delta \lambda + \int_{t_0}^{t_f} \left[ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right) \right] \cdot \delta x(t) dt + \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \cdot \delta x(t_f) \\ &= \left[ \frac{\partial h}{\partial t} + \lambda \cdot \frac{\partial m}{\partial t} + g - \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \cdot \dot{x} \right] \delta t_f + \left[ \frac{\partial h}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right] \cdot \delta x_f + \int_{t_0}^{t_f} \left[ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \right) \right] \cdot \delta x(t) dt \end{aligned}$$

在上面的推导中, 我们已经利用了关系  $\delta x_f = \delta x(t_f) + \dot{x}(t_f) \delta t_f$ , 可以立刻读出三个极值条件: 除了 E-L 方程外, 剩下的两个是:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \lambda \cdot \frac{\partial m}{\partial t} + g - \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \cdot \dot{x} = 0 \quad \frac{\partial h}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} = 0$$

通过这种对终端时刻和终端状态变分的方式, 我们可求解有一般目标集的最简最优控制问题: 仍考虑状态变量  $x(t) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^N$ 、控制变量  $u(t) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^M$ , 状态变量有初值条件  $x(t_0) = x_0$ , 和终端时刻的目标集  $\mathcal{S} = \{x(t_f) : m(x(t_f), t_f) = 0\}$ , 动力学方程  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ , 性能指标  $J[u] = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x, u, t) dt$ , 使用拉格朗日乘子引入约束 (包括动力学方程和终端时刻目标集), 对轨迹  $x(t)$ , 终端时间  $t_f$ , 终端状态  $x_f$  变分, 可获得最优控制的必要条件, 除了方程 1.48, 还将得到三个边界条件:

$$0 = \left[ \frac{\partial \bar{h}(x(t_f), t_f, \lambda)}{\partial x} - p(t_f) \right] \quad 0 = \left[ \frac{\partial \bar{h}(x(t_f), t_f, \lambda)}{\partial t} + \mathcal{H}(x(t_f), u(t_f), t_f) \right] \quad 0 = m(x(t_f), t_f) \quad (1.49)$$

其中  $\bar{h}(x(t_f), t_f, \lambda) = h(x(t_f), t_f) + \lambda \cdot m(x(t_f), t_f)$

下面考虑有内点约束的情形。例如, 我们希望控制一小车在起点和终点间进行折返跑, 此时我们必须引入“在  $[t_0, t_f]$  中某一时刻, 小车到达终点”这个约束。我们考虑形如  $\psi(x(t_1), t_1) = 0$  的约束, 同样将约束使用拉格朗日乘子法添加到性能指标中:

$$\begin{aligned} \bar{J} &= h(x(t_f), t_f) + \lambda \cdot \psi(x(t_1), t_1) + \int_{t_0}^{t_f} [g(x, u, t) + p(t) \cdot (f(x, u, t) - \dot{x})] dt \\ &:= h(x(t_f), t_f) + \lambda \cdot \psi(x(t_1), t_1) + \int_{t_0}^{t_f} [\mathcal{H}(x, u, p, t) - p \cdot \dot{x}] dt \end{aligned}$$

在时间点  $t_1$  前后, 可能有不同的控制策略  $u(t)$ , 因此  $\mathcal{H}$  在  $t_1$  两侧可能是不连续的 (假设  $x(t)$  在  $t_1$  处是连续的)。

将  $t_1 + \delta t_1$  处的轨迹变化记为  $\delta\xi$ ，对上面的性能指标进行变分：

$$\begin{aligned} \delta\bar{J} &= \delta\bar{J}_1(\delta x_f) + \delta\bar{J}_2(\delta t_f) + \delta\lambda \cdot \psi(x(t_1), t_1) + \lambda \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x} \cdot \delta\xi + \lambda \cdot \frac{\partial\psi}{\partial t_1} \delta t_1 \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \left[ \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x} \cdot \delta x + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u} \cdot \delta u + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p} \cdot \delta p - \delta p \cdot \dot{x} - p \cdot \delta\dot{x} \right] \\ &= \delta\bar{J}_1(\delta x_f) + \delta\bar{J}_2(\delta t_f) + \delta\lambda \cdot \psi(x(t_1), t_1) + \lambda \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x} \cdot \delta\xi + \lambda \cdot \frac{\partial\psi}{\partial t_1} \delta t_1 \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \left[ \left( \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x} + \dot{p} \right) \cdot \delta x + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u} \cdot \delta u + \left( \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p} - \dot{x} \right) \cdot \delta p \right] - [p(t_1) \cdot \delta x(t_1)]|_- \\ &+ \int_{t_1}^{t_f} \left[ \left( \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x} + \dot{p} \right) \cdot \delta x + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial u} \cdot \delta u + \left( \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p} - \dot{x} \right) \cdot \delta p \right] + [p(t_1) \cdot \delta x(t_1)]|_+ \\ &+ [H(x, u, p, t) - p \cdot \dot{x}]|_- \delta t_1 - [H(x, u, p, t) - p \cdot \dot{x}]|_+ \delta t_1 \end{aligned}$$

这里，正比于  $\delta x_f, \delta t_f$  的项被省略，分别记为  $\delta J_1(\delta x_f)$  和  $\delta J_2(\delta t_f)$ ，所有标记为  $-$  的项是在  $t_1$  左侧的项；所有标记为  $+$  的项是在  $t_1$  右侧的项。注意到  $\delta x(t_1)|_+, \delta x(t_1)|_-$  与  $\delta\xi$  并非是独立的变分，因此需利用关系：

$$\delta\xi = \delta x(t_1)|_- + \dot{x}(t_1)|_- \delta t = \delta x(t_1)|_+ + \dot{x}(t_1)|_+ \delta t$$

(这个关系的正确性在图1.4中简要说明) 继续化简变分，将它们都变成  $\delta\xi$ ：

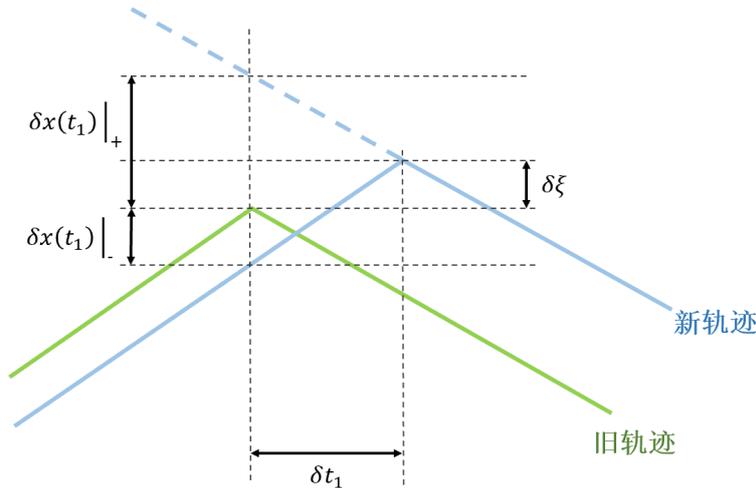


图 1.4:  $\delta\xi$  与  $\delta x(t_1)|_+, \delta x(t_1)|_-$  的关系

$$\delta\bar{J} = \delta\bar{J}_1 + \delta\bar{J}_2 + \int_{t_0}^{t_1} \dots dt + \int_{t_1}^{t_f} \dots dt + \delta\lambda \cdot \psi + \left( \lambda \cdot \frac{\partial\psi}{\partial t_1} + \mathcal{H}|_- - \mathcal{H}|_+ \right) \delta t + \left( \lambda \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x} - p|_- + p|_+ \right) \cdot \delta\xi$$

从中读出三个由内点约束带来的额外的条件：

$$\lambda \cdot \frac{\partial\psi}{\partial t_1} + \mathcal{H}|_- - \mathcal{H}|_+ = 0 \quad \lambda \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x} - p|_- + p|_+ = 0 \quad \psi(x(t_1), t_1) = 0$$

### 1.4.2 控制律有约束的最优控制：庞特里亚金极值原理

然而，我们知道，人或者发动机等装置能向系统内输入的力是有限制的，因此上述控制量  $u(t)$  无约束的最优控制问题的解往往难以在现实中应用。例如，考虑“在最短时间内，将一个小物块从  $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$  状态转移到  $x(t_f) = 0, \dot{x}(t_f) = 0$  状态”这一问题，只要我能输入尽可能大的力，这个过程就能在尽可能短的时间内被完成，这样的解显然是现实中行不通的。因此，我们有必要将  $u(t)$  也限制在一个可行集合中。那么， $\delta u(t)$  将不能随意取值，这导致了上文中标准变分法的失效。

我们将从最简单的问题开始研究：考虑系统状态  $x(t) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^N$ ，控制变量  $u(t) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^M$ ，且要求  $u(t) \in U, \forall t$ ，最小化一个只有终端代价的性能指标  $J[u] = h(x(t_f))$ ，终端时刻和终端状态均自由。现在声明：

最优控制  $u(t)$  应满足如下条件:

- 对任意  $u'(t) \in U$ , 在几乎任意时刻  $t \in [t_0, t_f]$ ,  $\mathcal{H}(x(t), u(t), p(t)) \leq \mathcal{H}(x(t), u'(t), p(t))$
- 状态变量  $x(t)$  和协态变量(一组与状态变量“对偶”的变量, 类似于上面的拉格朗日乘子)  $p(t) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^N$  应满足正则方程组  $\dot{x}(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \dot{p}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}$
- 满足边界条件  $\frac{\partial h(x(t_f))}{\partial x} - p(t_f) = 0, \mathcal{H}(x(t_f), u(t_f), p(t_f)) = 0$
- $\mathcal{H}(x, u, p) = 0, \forall t \in [t_0, t_f]$

类比前文中控制量无约束的问题, 此处只有终端代价, 故哈密顿量  $\mathcal{H} = p(t) \cdot f(x(t), u(t))$ 。下面给出证明: 设最优控制  $u(t)$ , 对应的状态  $x(t)$ , 终端时刻  $t_f$ 。现在对最优控制施加扰动, 变成  $u'(t) = u(t) + \delta u(t)$ , 对终端时刻施加扰动, 变成  $t'_f = t_f + \delta t_f$ , 计算性能指标的增量:

$$\begin{aligned}
 \Delta J &= J[u'] - J[u] = h(x'(t'_f)) - h(x(t_f)) \\
 &= [h(x'(t'_f)) - h(x(t'_f))] - [h(x(t'_f)) - h(x(t_f))] \\
 &\approx \frac{\partial h}{\partial x}(x(t'_f)) \cdot [x'(t'_f) - x(t'_f)] + \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f)) \cdot \dot{x}(t_f)[t'_f - t_f] \\
 &= \frac{\partial h}{\partial x}(x(t'_f)) \cdot \delta x(t'_f) + \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f)) \cdot f(x(t_f), u(t_f)) \delta t_f \\
 &= \left[ \frac{\partial h}{\partial x}(x(t'_f)) - \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f)) \right] \cdot \delta x(t_f) + \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f)) \cdot \delta x(t_f) + \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f)) \cdot f(x(t_f), u(t_f)) \delta t_f \\
 &\approx \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f)) \right] \cdot \delta x(t_f) \delta t_f + \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f)) \cdot \delta x(t_f) + \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f)) \cdot f(x(t_f), u(t_f)) \delta t_f \\
 &\approx \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f)) \cdot \delta x(t_f) + \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f)) \cdot f(x(t_f), u(t_f)) \delta t_f
 \end{aligned}$$

也就是说我们将代价的变化拆成了两部分:  $t_f$  时刻状态变化带来的代价变化, 和终端时间变化带来的代价变化。首先考虑  $t_f$  时刻状态不变, 单纯让终端时间变化带来的影响, 令  $\delta \bar{J} = 0$  得到:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f)) \cdot f(x(t_f), u(t_f)) \delta t_f \geq 0 \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f)) \cdot f(x(t_f), u(t_f)) = 0 \quad (1.50)$$

接着考虑终端时间不变, 只有  $t_f$  时刻状态变化的情形, 此时显然需要有:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f)) \cdot \delta x(t_f) \geq 0$$

我们需要分别求出  $\frac{\partial h(x(t_f))}{\partial x(t_f)}$  和  $\delta x(t_f)$  两部分, 首先看  $\delta x(t)$  随着时间的演化:

$$\begin{aligned}
 \delta \dot{x}(t) &\approx \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t) + \delta u(t)) \cdot \delta x(t) + [f(x(t), u(t) + \delta u(t)) - f(x(t), u(t))] \\
 &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t)) \cdot \delta x(t) + \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t) + \delta u(t)) - \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t)) \right] \cdot \delta x(t) + [f(x(t), u(t) + \delta u(t)) - f(x(t), u(t))]
 \end{aligned}$$

为了求出  $\frac{\partial h(x(t_f))}{\partial x(t_f)}$ , 我们决定追踪  $p(t) = \frac{\partial h(x(t_f))}{\partial x(t)}$  的演化, 我们需要导出其演化方程, 考虑:

$$\frac{\partial h(x(t_f))}{\partial x(t)} = \frac{\partial h(x(t_f))}{\partial x(t + \Delta t)} \cdot \frac{\partial x(t + \Delta t)}{\partial x(t)}$$

那么:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial h(x(t_f))}{\partial x(t)} \right] &\approx \frac{1}{\Delta t} \left[ \frac{\partial h(x(t_f))}{\partial x(t + \Delta t)} - \frac{\partial h(x(t_f))}{\partial x(t + \Delta t)} \cdot \frac{\partial x(t + \Delta t)}{\partial x(t)} \right] = \frac{\partial h(x(t_f))}{\partial x(t + \Delta t)} \frac{1}{\Delta t} \left[ 1 - \frac{\partial x(t + \Delta t)}{\partial x(t)} \right] \\
 &\approx \frac{\partial h(x(t_f))}{\partial x(t)} \frac{1}{\Delta t} \left[ 1 - \frac{\partial x(t + \Delta t)}{\partial x(t)} \right]
 \end{aligned}$$

而

$$x(t + \Delta t) \approx x(t) + f(x(t), u(t), t) \Delta t \Rightarrow \frac{\partial x(t + \Delta t)}{\partial x(t)} \approx 1 + \frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial x(t)} \Delta t$$

从而立刻得到  $p(t) = \frac{\partial h(x(t_f))}{\partial x(t)}$  的演化方程:

$$\frac{d}{dt}p(t) = -\frac{\partial f(x(t), u(t), t)}{\partial x} \cdot p(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}(x(t), u(t), p(t))}{\partial x} \quad (1.51)$$

配合上面求出的  $\delta x(t)$ , 得到:

$$\frac{d}{dt}[p(t) \cdot \delta x(t)] = p(t) \cdot \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t) + \delta u(t)) - \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t)) \right] \cdot \delta x(t) + p(t) \cdot [f(x(t), u(t) + \delta u(t)) - f(x(t), u(t))]$$

两侧积分得到:

$$p(t_f) \cdot \delta x(t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ p(t) \cdot \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t) + \delta u(t)) - \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t)) \right] \cdot \delta x(t) + \mathcal{H}(x, u + \delta u, p) - \mathcal{H}(x, u, p) \right\} dt$$

由于  $u(t)$  要落在可行集合内, 因此我们不能任意加上  $\delta u(t)$ , 引入所谓“针状变分”:

$$\delta u(t) = \begin{cases} \omega - u(t) & t \in [t_2, t_3], \omega \in U \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

这意味着我们只在  $[t_2, t_3]$  这一小段将控制律修改为  $\omega$ 。那么, 上面对  $[t_0, t_f]$  的积分立刻转化为对  $[t_2, t_3 = t_2 + \Delta t]$  的积分。设  $f(x, u)$  对两个槽位都是 Lipschitz 连续的, 系数分别为  $\gamma_f, \rho_f > 0$ , 则可证明由控制律扰动带来的状态扰动:

$$\|\delta x(t)\| \leq \exp(\gamma_f t) \int_{t_0}^t \exp(-\gamma_f \tau) \rho_f \|\delta u(\tau)\| d\tau$$

因此, 只要把针状变分的区间长度  $\Delta t$  设置得足够小, 上面  $p(t_f) \cdot \delta x(t_f)$  中, 积分号内的  $p(t) \cdot \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, u + \delta u) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) \right] \cdot \delta x$  就是比后面的部分更高一阶的小量, 可以忽略。利用最优控制的条件  $p(t_f) \delta x(t_f) \geq 0$  得到:

$$\int_{t_2}^{t_2 + \Delta t} [\mathcal{H}(x(t), u(t) + \delta u(t), p(t)) - \mathcal{H}(x(t), u(t), p(t))] dt \geq 0$$

这意味着, 对任意  $u_0 \in U$ , 有:

$$\int_{t_2}^{t_2 + \Delta t} [\mathcal{H}(x(t), u_0, p(t)) - \mathcal{H}(x(t), u(t), p(t))] dt \geq 0$$

由积分中值定理, 存在  $\tau \in [t_2, t_2 + \Delta t]$ , 使得:

$$[\mathcal{H}(x(\tau), u'(\tau), p(\tau)) - \mathcal{H}(x(\tau), u(\tau), p(\tau))] \geq 0, \forall u'(\tau) \in U \quad (1.52)$$

由  $\mathcal{H}$  的定义立刻知道  $\mathcal{H}(x(t_f), u(t_f), p(t_f)) = 0$ , 下面证明它在系统运行过程中恒为 0。首先证明它连续。考虑  $u(t)$  的不连续点左侧的任一连续点  $t_1 - \epsilon$ , 取任一容许控制  $u'(t_1 - \epsilon)$ , 最优控制仍记为  $u(t_1 - \epsilon)$ , 那么:

$$\mathcal{H}(x(t_1 - \epsilon), u(t_1 - \epsilon), p(t_1 - \epsilon)) \leq \mathcal{H}(x(t_1 - \epsilon), u'(t_1 - \epsilon), p(t_1 - \epsilon))$$

取  $u'(t_1 - \epsilon) = u(t_1 + \epsilon)$ , 并令  $\epsilon \rightarrow 0$ , 立刻得到:

$$\mathcal{H}(x(t_1), u(t_1), p(t_1))|_- \leq \mathcal{H}(x(t_1), u(t_1), p(t_1))|_+$$

同样的操作将得到:

$$\mathcal{H}(x(t_1), u(t_1), p(t_1))|_+ \leq \mathcal{H}(x(t_1), u(t_1), p(t_1))|_-$$

立刻知道  $\mathcal{H}$  是对  $t$  连续的。考虑  $\mathcal{G}(x(t), p(t))$  是最优控制轨迹上的  $\mathcal{H}$ , 即  $\mathcal{G}(x(t), p(t)) = \min_{u'(t)} \mathcal{H}(x(t), u'(t), p(t))$ 。考虑任意区间  $[t_2, t_3]$ , 由极值条件:

$$\mathcal{H}(x(t_2), u(t_3), p(t_2)) \geq \mathcal{H}(x(t_2), u(t_2), p(t_2)) = \mathcal{G}(x(t_2), p(t_2))$$

以及

$$\mathcal{H}(x(t_3), u(t_2), p(t_3)) \geq \mathcal{H}(x(t_3), u(t_3), p(t_3)) = \mathcal{G}(x(t_3), p(t_3))$$

从而有不等式:

$$\mathcal{H}(x(t_3), u(t_3), p(t_3)) - \mathcal{H}(x(t_2), u(t_3), p(t_2)) \leq \mathcal{G}(x(t_3), p(t_3)) - \mathcal{G}(x(t_2), p(t_2)) \leq \mathcal{H}(x(t_3), u(t_2), p(t_3)) - \mathcal{H}(x(t_2), u(t_2), p(t_2))$$

看这个不等式的两边，以左侧为例：

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \{ \mathcal{H}(x(t_3), u(t_3), p(t_3)) - \mathcal{H}(x(t_2), u(t_3), p(t_2)) \} \\ & \approx \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ -[x(t_2) - x(t_3)] \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x(t_3), u(t_3), p(t_3)) - [p(t_2) - p(t_3)] \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}(x(t_3), u(t_3), p(t_3)) \right\} \\ & \approx \dot{x} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x(t_3), u(t_3), p(t_3)) + \dot{p} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}(x(t_3), u(t_3), p(t_3)) = 0 \end{aligned}$$

等式右侧可做类似处理。由不等式夹逼得到  $\frac{d}{dt} \mathcal{G}(x(t), u(t)) = 0$ ，从而在最优控制下， $\mathcal{H}(x(t), u(t), p(t)) = 0$  恒成立。至此，我们证明了最优控制时， $x(t), u(t), p(t)$  应满足的所有条件，通过利用这些条件给出最优控制的方式称为“庞特里亚金极值原理”。在这个证明中我们主要做了两件比较不平凡的事情：1) 将标准变分换成针状变分，相较于标准变分“在整个路径上都有变化，但是变化无限小”的操作，针状变分的做法是“仅在一段时间上有变化，但变化的时间无穷短”；2) 我们追踪了  $p(t) = \frac{\partial h(x(t_f))}{\partial x(t)}$  的变化，也就是说，协态变量的意义是“影子价格”，它反映了  $t$  时刻轨迹稍稍变化，对性能指标的影响。

下面我们将给出其他更复杂情况下的极值原理，我们将尝试把更复杂的问题归约到之前求解过的简单问题。首先修改性能指标的形式，在性能指标中加入运行代价： $J[u] = h(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t)) dt$ ，为此，引入新的状态变量  $\dot{x}_{N+1}(t) = g(x(t), u(t))$ ，性能指标就写成  $J = h(x(t_f)) + x_{N+1}(t_f)$ 。利用前面已经得到的极值条件求解这个新问题。记  $\bar{x}(t) = [x^T(t), x_{N+1}(t)]^T$ ,  $\bar{p}(t) = [p^T(t), p_{N+1}(t)]^T$ ，此时的哈密顿量应当是：

$$\mathcal{H}(\bar{x}(t), u(t), \bar{p}(t)) = p(t) \cdot f(x(t), u(t)) + p_{N+1}(t) g(x(t), u(t))$$

由协态变量满足的方程：

$$\dot{p}(t) = - \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t)) \right] \cdot p(t) - p_{N+1} \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), u(t)), \quad \dot{p}_{N+1}(t) = 0$$

由  $t_f$  时刻边界条件：

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f)) - p(t_f) = 0, \quad 1 - p_{N+1}(t_f) = 0$$

可以看出，新加入的  $p_{N+1}(t) = 1$  恒成立，因此我只需要将  $\mathcal{H}$  设置为

$$\mathcal{H}(x(t), p(t), u(t)) = p(t) \cdot f(x(t), u(t)) + g(x(t), u(t)) \quad (1.53)$$

就可以直接使用上文中仅有终端代价问题的四个极值条件了。下面我们再考虑动力学方程和性能指标都可以显含时间的情况，即  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ ,  $J[u] = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt$ ，这可以通过引入新的状态变量  $\dot{x}_{N+1}(t) = 1, x_{N+1}(t_0) = t_0$  来将此问题归约到刚才求解过的问题（性能指标中含有运行代价，但性能指标和动力学方程均不显含时间），此时的哈密顿量应当是：

$$\bar{\mathcal{H}}(\bar{x}(t), u(t), \bar{p}(t)) = g(x(t), u(t), t) + p(t) \cdot f(x(t), u(t), t) + p_{N+1}(t) \cdot 1$$

为了和上面性能指标、动力学方程不显含  $t$  的情形下  $\mathcal{H}$  的形式看起来一致，我们不希望最终的结论中出现  $\bar{\mathcal{H}}$ ，而要出现  $\mathcal{H}(x(t), u(t), p(t), t)$ ，它定义为：

$$\bar{\mathcal{H}}(\bar{x}(t), u(t), \bar{p}(t)) := \mathcal{H}(x(t), u(t), p(t), t) + p_{N+1}(t) \Rightarrow \mathcal{H}(x(t), u(t), p(t), t) = g(x(t), u(t), t) + p(t) \cdot f(x(t), u(t), t)$$

由  $\bar{\mathcal{H}}$  的极值条件  $\bar{\mathcal{H}}(\bar{x}(t), u(t), \bar{p}(t)) \leq \bar{\mathcal{H}}(\bar{x}(t), u'(t), \bar{p}(t)), \forall u'(t) \in U$ ，可知  $\mathcal{H}(x(t), u(t), p(t), t) \leq \mathcal{H}(x(t), u'(t), p(t), t)$ ,  $\forall u'(t) \in U$ ，这是关于  $\mathcal{H}$  的极值条件。考虑原有的状态变量、协态变量的演化：

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}(\bar{x}, u, p)}{\partial p} = \frac{\partial \mathcal{H}(x, u, p, t)}{\partial p} \quad \dot{p}(t) = - \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}(\bar{x}, u, p)}{\partial x} = - \frac{\partial \mathcal{H}(x, u, p, t)}{\partial x} \quad (1.54)$$

利用边界条件：

$$0 = \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f), t_f) - p(t_f) \quad 0 = \frac{\partial h}{\partial t}(x(t_f), t_f) - p_{N+1}(t_f) \quad (1.55)$$

以及

$$0 = \bar{\mathcal{H}}(\bar{x}(t_f), u(t_f), \bar{p}(t_f)) = \mathcal{H}(x(t_f), u(t_f), p(t_f), t_f) + p_{N+1}(t_f)$$

将方程1.55中的第二式代入上式，得到：

$$0 = \mathcal{H}(x(t_f), u(t_f), p(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(x(t_f), t_f) \quad (1.56)$$

我们看到这样的非自治系统的最优控制律和状态演化仍然由  $\mathcal{H}$  对  $u(t)$  的极值条件，状态变量、协态变量满足的正则方程组（方程1.54）以及边界条件（方程1.55, 1.56）给出。相比于之前不含时的版本，我们失去了  $\mathcal{H}(x(t), u(t), p(t), t) = 0$  恒成立这个性质。最后我们考虑系统的终端时刻、终端状态受约束的情形。设系统必须落在目标集  $S = \{x(t_f) : m(x(t_f), t_f) = 0\}$  中，仍然使用乘子法将约束放到性能指标中：

$$\bar{J}[u, \lambda] = h(x(t_f), t_f) + \lambda \cdot m(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt := \bar{h}(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt$$

可以看出，除了需要满足哈密顿量  $\mathcal{H}(x(t), u(t), p(t), \lambda, t)$  对  $u(t)$  的极值条件，状态变量、协态变量的演化方程之外，需要满足边界条件：

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial x}(x(t_f), t_f, \lambda) - p(t_f) = 0, \quad m(x(t_f), t_f) = 0, \quad \mathcal{H}(x(t_f), u(t_f), p(t_f), \lambda, t_f) + \frac{\partial \bar{h}}{\partial t}(x(t_f), t_f, \lambda) = 0 \quad (1.57)$$

### 1.4.3 连续时间动态规划：哈密顿-雅可比-贝尔曼方程

上面介绍的庞特里亚金极值原理是一种“面向策略”的方法，我们还有一种“面向值函数”的方法。定义值函数  $V(x, t)$  是在初始时刻  $t$ ，从初始状态  $x$  出发，运行到终端时刻所需的最小代价，换言之：

$$V(x, t) = \min_{u(t)} \left[ h(x(t_f), t_f) + \int_t^{t_f} g(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right] \quad s.t. x(t) = x$$

简单起见，考虑一类终端时间固定、终端状态自由的最优控制问题：有状态变量  $x(t)$ ，控制变量  $u(t)$ ，系统动力学方程  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ ，性能指标  $J[u] = h(x(t_f), t_f) + \int_t^{t_f} g(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau$ 。若值函数  $V(x, t)$  二阶连续可微，则如下 PDE（被称为 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程）是最优控制的充要条件：

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(x(t), t) = \min_{u(t) \in \mathbb{R}^M} \mathcal{H} \left( x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t), t)}{\partial x}, t \right) \quad (1.58)$$

边界条件是：

$$V(x(t_f), t_f) = h(x(t_f), t_f) \quad (1.59)$$

其中  $\mathcal{H} = g + p \cdot f$ 。我们将分别对 HJB 方程的必要性和充分性给予证明。

首先证明必要性：若  $u(t)$  是最优控制，则 HJB 方程必成立。这需要将值函数中的积分拆成两段：

$$\begin{aligned} V(x(t), t) &= \min_{u(\tau)} \left[ h(x(t_f), t_f) + \int_t^{t_f} g(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right] \\ &= \min_{u(\tau)} \left[ h(x(t_f), t_f) + \int_{t+\Delta t}^{t_f} g(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \int_t^{t+\Delta t} g(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right] \\ &= \min_{u(\tau)} \left[ V(x(t+\Delta t), t+\Delta t) + \int_t^{t+\Delta t} g(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right] \end{aligned}$$

这里我们已经使用了序贯决策问题的最优子结构性质：若  $u(\tau), \tau \in [t, t_f]$  是  $\tau \in [t, t_f]$  上的最优控制，则  $u(\tau), \tau \in [t+\Delta t, t_f]$  必然是  $\tau \in [t+\Delta t, t_f]$  上的最优控制，如果不是，我们可以把  $\tau \in [t+\Delta t, t_f]$  这一段的控制律换掉，这与  $u(\tau), \tau \in [t, t_f]$  是最优控制矛盾。继续推导：

$$V(x(t), t) \approx \min_{u(\tau)} \left[ g(x(t), u(t), t) \Delta t + V(x(t), t) + \frac{\partial V}{\partial t}(x(t), t) \Delta t + \frac{\partial V(x)}{\partial x}(x(t), t) \cdot f(x(t), u(t), t) \Delta t \right]$$

两侧同时减去  $V(x(t), t)$ ，并把  $\frac{\partial V}{\partial t}(x(t), t) \Delta t$  移到左侧（我们能做这两个操作是因为我们操作的项与  $u(t)$  无关，不受“取最小”这个操作的影响），然后两边除以  $\Delta t$ ，直接得到 HJB 方程。

接下来证明充分性。我们需要证明 HJB 方程满足时：1)  $V(x(t), t)$  确实是值函数，2) 且  $u(t)$  确实是最优控制。分两步完成这个证明，第一步证明  $V(x_0, t_0)$  是在  $t_0$  时刻从  $x_0$  状态出发，施加某个控制律  $u(t)$  的性能指标，

这需要我们找到  $V(x(t), t)$  的全导数。记：

$$u(t) = \arg \min_{\xi} \mathcal{H} \left( x(t), \xi, \frac{\partial V(x(t), t)}{\partial x}, t \right)$$

那么：

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial t}(x(t), t) &= \min_{\xi} \mathcal{H} \left( x(t), \xi, \frac{\partial V(x(t), t)}{\partial x}, t \right) \\ &= \mathcal{H} \left( x(t), u(t), \frac{\partial V(x(t), t)}{\partial x}, t \right) \\ &= g(x(t), u(t), t) + \frac{\partial V(x(t), t)}{\partial x} \cdot f(x(t), u(t), t) \end{aligned}$$

移项：

$$\begin{aligned} 0 &= g(x(t), u(t), t) + \frac{\partial V(x(t), t)}{\partial x} \cdot f(x(t), u(t), t) + \frac{\partial V}{\partial t}(x(t), t) \\ &= g(x(t), u(t), t) + \frac{\partial V(x(t), t)}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial t}(x(t), t) \\ &= g(x(t), u(t), t) + \frac{d}{dt} [V(x(t), t)] \end{aligned}$$

对  $[t_0, t_f]$  区间积分，得到：

$$V(x(t_0), t_0) = V(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt$$

第二步，我们证明使得每时每刻  $\mathcal{H}$  取最小值的控制律  $u(t)$  确实是最优控制律。设我们使用了不同于最优控制的控制律  $u'(t)$ ，系统的状态是  $x'(t)$ ，则：

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(x'(t), t) = \min_{\xi} \mathcal{H} \left[ x'(t), \xi, \frac{\partial V}{\partial x}(x'(t), t), t \right] \leq \mathcal{H} \left[ x'(t), u'(t), \frac{\partial V}{\partial x}(x'(t), t), t \right]$$

使用与第一步中类似的推导，得到：

$$V(x'(t_0) = x_0, t_0) \leq V(x'(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x'(t), u'(t), t) dt$$

左侧是从  $t_0$  时刻出发，以  $x_0$  为初始状态，控制律  $u(t)$  下的性能指标，右侧是控制律  $u'(t)$  下的性能指标。所以  $u(t)$  确实是最优控制。

最后，我们要证明  $\frac{\partial V}{\partial x}(x(t), t)$  就是协态变量，从而 HJB 方程给出了与庞特里亚金极值原理相同的  $\mathcal{H}$  对  $u(t)$  的极值条件。直接追踪其时间演化（仍以  $u(t)$  记代表最优控制）：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial V}{\partial x}(x(t), t) \right] &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x(t), t) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x}(x(t), t) \\ &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x(t), t) \cdot f(x(t), u(t), t) + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t}(x(t), t) \\ &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x(t), t) \cdot f(x(t), u(t), t) - \frac{\partial}{\partial x} \left[ g(x(t), u(t), t) + \frac{\partial V}{\partial x}(x(t), t) \cdot f(x(t), u(t), t) \right] \\ &= -\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), u(t), t) - \frac{\partial V}{\partial x}(x(t), t) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t), t) \\ &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \left( x(t), u(t), \frac{\partial V}{\partial x}(x(t), t), t \right) \end{aligned}$$

所以  $\frac{\partial V}{\partial x}(x(t), t)$  的演化方程与  $p(t)$  一致。边界条件  $V(x(t_f), t_f) = h(x(t_f), t_f)$  直接给出：

$$p(x(t_f), t_f) = \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f), t_f)$$

$t_f$  时刻使用 HJB 方程给出：

$$0 = \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f), t_f) + \mathcal{H}(x(t_f), u(t_f), \frac{\partial V}{\partial x}(x(t_f), t_f), t_f)$$

这是前面动力学方程和性能指标含时问题的关于  $p(t)$  和  $\mathcal{H}(x, u, p, t)$  的边界条件。

### 1.4.4 简单例子：线性二次型调节器

现在我们举一个简单且常用的例子：线性二次型调节器（LQR）。考虑系统有状态变量  $x(t) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^N$ ，控制变量  $u(t) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^M$ ，系统的动力学方程是：

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad A(t) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}, B(t) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^{N \times M}$$

系统终端时刻  $t_f$  固定，终端状态自由，控制变量无约束，最小化二次型的性能指标：

$$J[u] = \frac{1}{2}x^T(t_f)Hx(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)] dt$$

其中  $H \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ， $Q(t) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ ， $R(t) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^{M \times M}$ ， $H, Q(t)$  半正定， $R(t)$  正定。首先使用庞特里亚金极值原理求解这个问题。构造哈密顿量：

$$\mathcal{H}(x, u, p, t) = \frac{1}{2}x^T(t)Q(t)x(t) + \frac{1}{2}u^T(t)R(t)u(t) + p^T(t)A(t)x(t) + p^T(t)B(t)u(t)$$

利用极值条件：

$$0 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = R(t)u(t) + B^T(t)p(t) \Rightarrow u(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)p(t) \quad (1.60)$$

这是 LQR 问题的开环控制律  $u(t)$ 。将其代入哈密顿量，使用正则方程组即可得到状态变量、协态变量的演化：

$$\mathcal{M}(t) = \begin{bmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \mathcal{M}(t) \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix}$$

然而，这样的开环控制律是在使用之前预先计算好的，在实际使用中，系统常受到外界扰动导致系统状态偏离开环控制律下的  $x(t)$ ，此时再给系统施加预先计算好的开环控制律可能会导致“越来越错”的效果，系统的鲁棒性极差（没有反馈，就没有鲁棒性！这会导向一个被称为“鲁棒控制”的领域，专门设计控制器以最优化最坏情况下的控制器性能！）。因此，我们希望计算一个反馈控制律/闭环控制律，显然是要将  $p(t)$  用  $x(t)$  表示出来。该微分方程的解有如下形式：

$$\begin{bmatrix} x(t_f) \\ p(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t_f, t) & \phi_{12}(t_f, t) \\ \phi_{21}(t_f, t) & \phi_{22}(t_f, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix}$$

根据  $p(t)$  的边界条件，有：

$$p(t_f) = Hx(t_f) \Rightarrow H\phi_{11}(t_f, t)x(t) + H\phi_{12}(t_f, t)p(t) = \phi_{21}(t_f, t)x(t) + \phi_{22}(t_f, t)p(t)$$

从这里解出：

$$p(t) = [\phi_{22}(t_f, t) - H\phi_{12}(t_f, t)]^{-1} [H\phi_{11}(t_f, t) - \phi_{21}(t_f, t)]x(t) := K(t)x(t)$$

这里的  $K(t)$  可以直接解 ODEs 解出来，我们也可以导出  $K(t)$  服从的演化方程。将  $p(t)$  代入  $x(t), p(t)$  的演化方程：

$$\dot{x}(t) = [A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)]x(t) \quad \dot{K}(t)x(t) + K(t)\dot{x}(t) = [-Q(t) - A^T(t)K(t)]x(t)$$

消去  $\dot{x}(t)$ ，使得  $(\dots)x(t) = 0$  中  $x(t)$  前的系数得 0，可以得到  $K(t)$  满足的 Riccati 递归方程：

$$0 = \dot{K}(t) + Q(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)K(t) + K(t)A(t) + A^T(t)K(t) \quad (1.61)$$

边界条件  $K(t_f) = H$ 。

这个问题也可以使用 HJB 方程求解。哈密顿量中的  $p(t)$  换成  $\frac{\partial V}{\partial x}$ ：

$$\mathcal{H} \left( x(t), u(t), \frac{\partial V}{\partial x}(x(t), t), t \right) = \frac{1}{2}x^T(t)Q(t)x(t) + \frac{1}{2}u^T(t)R(t)u(t) + \left[ \frac{\partial V}{\partial x}(x(t), t) \right] [A(t)x(t) + B(t)u(t)]$$

由  $\mathcal{H}$  取极值得到：

$$u(t) = -R^{-1}(t)B(t)\frac{\partial V}{\partial x}(x(t), t)$$

代入 HJB 方程：

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x(t), t) + \frac{1}{2}x^T(t)Q(t)x(t) + \left[ \frac{\partial V}{\partial x}(x(t), t) \right] A(t)x(t) - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial V}{\partial x}(x(t), t) \right]^T B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \frac{\partial V}{\partial x}(x(t), t) = 0$$

直接解这个方程当然是很难的,需要猜测值函数的形式。直接猜测它也是二次型,即  $V(x(t), t) = \frac{1}{2}x^T(t)K(t)x(t)$ , 将其代入上式,可以得到与方程1.61相同的结果。

### 1.4.5 \* 试验内容: 最优控制与经典力学的关系; 一类最优控制问题的几何化

看到这里,相信每个人都会有点疑惑:为什么我们将  $\mathcal{H}$  叫做“哈密顿量”?为什么状态变量和协态变量竟然满足哈密顿正则方程组?这里给出一种也许可行的解释。首先我们说明其实有两种等效的极值原理。之前,我们构造的哈密顿量是:

$$\mathcal{H} = g(x(t), u(t), t) + p(t) \cdot f(x(t), u(t), t)$$

正则方程组、极值条件:

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = f \quad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial x} - p \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \quad u(t) = \arg \min_{u(t)} \mathcal{H}(x(t), u(t), p(t), t)$$

严格来说这个叫庞特里亚金极小值原理,还有另外一种极值原理,它的哈密顿量:

$$\mathcal{H}' = -g(x'(t), u'(t), t) + p'(t) \cdot f(x'(t), u'(t), t)$$

正则方程组和极值条件:

$$\dot{x}' = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial p'} = f \quad \dot{p}' = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial x'} = +\frac{\partial g'}{\partial x'} - p' \cdot \frac{\partial f'}{\partial x'} \quad u'(t) = \arg \max_{u'(t)} \mathcal{H}'(x'(t), u'(t), p'(t), t)$$

这被称为严格来说这个叫庞特里亚金极大值原理。很容易证明它们二者是等价的,只需令  $x'(t) = x(t), p'(t) = -p(t), u(t) = u'(t)$ , 则  $\mathcal{H}' = -\mathcal{H}$ , 从而这个  $u(t)$  在最小化  $\mathcal{H}$  的同时将最大化  $\mathcal{H}'$ , 也就是说极小值原理和极大值原理给出相同的控制律;并且,此时两套正则方程组也是完全相同的。

我们在极小值原理的框架下试着找找最优控制和经典力学的关系。由于整个经典力学都是在标准变分的框架下推导的,没有使用针状变分,因此它的能力仅限于处理控制律无约束的最优控制问题。简便起见,考虑系统有状态变量  $x(t) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^N$ , 控制变量  $u(t) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^M$ , 终端状态、终端时刻自由或固定(我们暂时不管边界条件,先尝试做出  $x(t), p(t)$  的演化方程), 性能指标只有运行代价:  $J[u] = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt$ 。一个重要的特性是,经典力学是一种“命题作文”,系统演化的所有信息都包含在作用量中;最优控制是“完形填空”,性能指标和动力学方程共同指定了系统的演化。所以首先我们要给最优控制问题找个作用量/拉氏量。一种做法是:考虑  $2N + M$  维系统,将其前  $N$  个广义坐标  $q_1, \dots, q_N$  对应到状态变量  $x_1(t), \dots, x_N(t)$ ; 将其第  $N + 1 \sim N + M$  个广义坐标对应到控制变量  $u_1(t), \dots, u_M(t)$ ; 将其第  $N + M + 1 \sim 2N + M$  个广义坐标对应到协态变量  $p_1(t), \dots, p_N(t)$ , 使用如下拉氏量:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = -g(q, t) + \sum_{i=1}^N q_{N+M+i}(\dot{q}_i - f_i(q))$$

做个勒让德变换给出哈氏量。先求正则动量:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = q_{N+M+i}, \quad p_{N+k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{N+k}} = 0 \quad (k = 1, \dots, M), \quad p_{N+M+i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{N+M+i}} = 0 \quad (i = 1, \dots, N)$$

注意这里的  $p$  是正则动量,不是之前提到的协态变量(然而它们共用符号了)。我们之前把  $q_{N+M+i}$  设置成协态变量,现在可以看到它们就是与前  $N$  个正则坐标对应的正则动量。求出哈氏量:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_{i=1}^{2M+N} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \\ &= \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - \sum_{i=1}^N p_i(\dot{q}_i - f_i(q, t)) + g(q, t) \\ &= g(q, t) + \sum_{i=1}^N p_i f_i(q, t) \end{aligned}$$

这个就是我们在极大值原理中构造的哈密顿量。但是注意我们之前求出了  $p_{N+k} = 0, p_{N+M+i} = 0$ , 也就是说系统有  $N + M$  个约束,根据 Dirac 的约束理论,我们需要在哈氏量中补充  $N + M$  个乘子。令  $\phi_{N+k}(p, q) =$

$p_{N+k}$  ( $k = 1, \dots, M$ ),  $\phi_{N+M+j}(p, q) = p_{N+M+j}$  ( $j = 1, \dots, N$ ), 加入乘子后的哈氏量是:

$$\mathcal{H}^\dagger = g(q, t) + \sum_{i=1}^N p_i f_i(q, t) + \sum_{k=1}^M \phi_{N+k}(p, q) \lambda_{N+k}(t) + \sum_{j=1}^N \phi_{N+M+j}(p, q) \lambda_{N+M+j}(t)$$

下面写出正则方程。关于下标  $1, \dots, N$  的正则方程是:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = f_i(q, t) \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\frac{\partial g(q, x)}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^N p_j \frac{\partial f_j(q, t)}{\partial q_i}$$

这是状态变量、协态变量的演化方程。关于下标  $N+1, \dots, N+M$  的正则方程是:

$$\dot{q}_{N+k} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{N+k}} = \lambda_{N+k}(t) \quad \dot{p}_{N+k} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{N+k}} = -\frac{\partial g(q, x)}{\partial q_{N+k}} - \sum_{j=1}^N p_j \frac{\partial f_j(q, t)}{\partial q_{N+k}} = 0$$

这里前半方程不给出任何信息, 后半方程作为次级约束给出最优控制律。关于下标  $N+M+1, \dots, 2N+M$  的正则方程是:

$$\dot{q}_{N+M+i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{N+M+i}} = \lambda_{N+M+i}(t) \quad \dot{p}_{N+M+i} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{N+M+i}} = 0$$

从上面这些方程, 我们可以看出  $p_{N+k} q_{N+M+i}, p_{N+M+i}$  这三部分完全没用, 通过求解  $\dot{p}_{N+k} = 0$  这  $M$  个方程, 在一些条件下 (隐函数定理), 我可将控制律  $q_{N+k}$  以  $q_i, p_i$  显式写出。从而系统应当被视作在相空间的  $2N$  维子流形上运动 (换言之, 原系统等价于一个  $2N$  维相空间中的新系统, 这个新系统的哈氏量是  $\mathcal{H}' = g(q, t) + \sum_{i=1}^N p_i f_i(q, t)$ ,  $f_i(q, t)$  中所有的控制变量使用  $q_i, p_i$  表示出), 只有  $q_i, p_i$  是能有效描述系统状态的变量。

经典力学中的 HJB 方程和上述最优控制中的 HJB 方程有不同, 经典力学中的 HJB 方程是关于经典作用量/第二类正则变换生成函数的方程, 其自变量是路径的终点; 最优控制中的 HJB 方程是关于值函数的方程, 其自变量是路径的起点。为了从经典力学的角度做出最优控制中的 HJB 方程, 我们需要研究从某一起点  $(q, t)$  出发, 到达固定终点  $(q_f, t_f)$  的路径的作用量。考虑扰动路径的初始点、初始时间和路径本身, 作用量的变化是:

$$\delta S(q, t) = \int_{t_0}^{t_f} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \right) dt + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q(t) \right) \Big|_{t_0}^{t_f} - \mathcal{L} \delta t = - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q(t) \right) \Big|_{t_0} - \mathcal{L} \delta t$$

利用关系  $\delta q(t_0) = dq - \dot{q}(t_0) \delta t$ ,  $q'(t_0 + \delta t) - q(t_0) = dq$ , 可知:

$$\delta S = -(p \cdot dq - p \cdot \dot{q} dt) - \mathcal{L} dt = -p \cdot dq + \mathcal{H} dt = \frac{\partial S}{\partial q} \cdot dq + \frac{\partial S}{\partial t} dt$$

注意, 按照上文中拉氏量的定义, 路径的经典作用量  $S = \int \mathcal{L} dt$  是值函数的相反数 (我们在拉氏量中减去了运行代价)。因此:

$$\delta V = +p \cdot dq - \mathcal{H} dt = \frac{\partial V}{\partial q} \cdot dq + \frac{\partial V}{\partial t} dt$$

从中直接提取出最优控制的 HJB 方程:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(q, t) = -\mathcal{H} \left( q, \frac{\partial V}{\partial q}, t \right)$$

另一个有趣的问题是: 最优控制律下系统的轨迹可以被视作某个度规下的测地线吗? 或者说我们能否找到一套程序化的方式将最优控制问题几何化? 这里浅浅讨论一类问题, 系统有状态变量  $x(t) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^N$ , 控制变量  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_M(t)$  都是标量函数, 系统的动力学方程  $\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^M u_i f_i(x)$ ,  $f_i(x) : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ , 性能指标  $J[u] = \int \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M u_i^2 dt$ 。这个问题代表了一系列的能量最小化问题。这里我们从极大值原理的哈氏量出发开始讨论 (这只是因为我是从一些简单例子开始尝试的, 从极大值原理出发导致后面的一些例子中,  $\mathcal{H}$  将包含一个关于  $p$  的正定二次型, 看起来比较顺眼), 考虑庞特里亚金极大值原理的哈氏量:

$$\mathcal{H} = p^T \left( f_0(x) + \sum_{i=1}^M u_i f_i(x) \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M u_i^2$$

最优控制律是  $u_i = p^T f_i(x)$ , 代入得到上文中提到的  $2N$  维相空间中的哈氏量:

$$\mathcal{H} = p^T f_0(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M p^T F_i(x) p, \quad F_i(x) = f_i(x) f_i^T(x)$$

从这里能看出其实最优控制和哈氏力学是自动兼容的，然而我们一般不在相空间中谈度规（相空间中只有正则辛形式），在拉氏力学中，我们可以在构型空间上配备度规，比如如果拉氏量形如  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j - V(x)$ ，我们会有 Jacobi 度规  $g_{ij} = 2(E - V(x))m_{ij}$ ，所以我们的第一个想法一定是试图把这个哈氏力学系统换到拉氏力学系统。然而，这个变换要求  $\sum_{i=1}^M F_i(x)$  可逆。一般情况下这不可能，一种可行的方式是先补上一个  $p^T(\epsilon I)p$ ，之后再令  $\epsilon \rightarrow 0$ 。令  $\tilde{F}(x) = \sum_{i=1}^M F_i(x) + \epsilon I$ ，考虑哈氏量到拉氏量的变换：

$$\tilde{\mathcal{H}} = p^T f_0(x) + \frac{1}{2}p^T \tilde{F}(x)p \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{x} - f_0(x))^T \tilde{F}^{-1}(x)(\dot{x} - f_0(x))$$

这个拉氏量的形式可以归结为：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j + A_i(x)\dot{x}^i - V(x)$$

其实就是电磁场中经典带电粒子的拉氏量。我们声称这个拉氏量可以通过“升一维”的方式实现几何化：引入新坐标  $s$ ，以下度规的测地线在  $\{x^1, \dots, x^N\}$  上的投影与上述拉氏量给出的运动轨迹相同：

$$(dl)^2 = m_{ij}(x)dx^i dx^j + \phi(x)(ds + A_i(x)dx^i)^2$$

我们来证明这一点，同时将未定的标量函数  $\phi(x)$  确定下来。由 E-L 方程，原拉氏量给出的运动方程是：

$$\frac{1}{2} \frac{\partial m_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j - \frac{\partial m_{kj}}{\partial x^l} \dot{x}^l \dot{x}^j - m_{kj} \ddot{x}^j + F_{ki} \dot{x}^i - \frac{\partial V}{\partial x^k} = 0, \quad F_{ki} = \frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i}$$

仍然使用 E-L 方程求出  $(dl)^2 = \dots$  度规的测地线，这需要构造拉氏量：

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}m_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j + \frac{1}{2}\phi(x)(\dot{s} + A_i(x)\dot{x}^i)^2$$

显然  $s$  是循环坐标，那么有守恒量：

$$\phi(x)(\dot{s} + A_i(x)\dot{x}^i) = \text{Const} = Q$$

关于  $x^k$  的 E-L 方程给出：

$$\frac{1}{2} \frac{\partial m_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j - \frac{\partial m_{kj}}{\partial x^l} \dot{x}^l \dot{x}^j - m_{kj} \ddot{x}^j + Q F_{ki} \dot{x}^i + \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \frac{Q^2}{\phi^2(x)} = 0$$

对比可知  $Q = 1$ ，以及

$$\frac{Q^2}{\phi^2(x)} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^k} = -\frac{\partial V(x)}{\partial x^k} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{\phi(x)} = V(x) + C$$

$C$  是任意常数。至此我们完成了证明。看看新引入的坐标  $s$ ，由于  $\phi(x)(\dot{s} + A_i(x)\dot{x}^i) = 1$ ，它不是独立的。 $s$  本身不出现在度规中，因此  $s$  的取值有规范自由性。在度规中出现了  $(ds + A_i(x)dx^i)$  这样的项，如果我对磁场做规范变换，使得  $A_i(x) \rightarrow A_i(x) + \partial_i \Lambda(x)$ ，那么我可以同时做变换： $s \rightarrow s - \Lambda(x)$  使得度规保持不变。注意，电磁场的规范变换与波函数/狄拉克旋量的相位变换一同出现，所以我完全可以认为我们的构型空间不是  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^1$ ，而是  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^1$ ，也就是说新加入的这个维度是个圆环，做变换  $s \rightarrow s + 2\pi$  后回到原点。我们讨论的是如何为电磁场中经典粒子的构型空间配备度规，但是这个理论有相对论协变版本（Kaluza-Klein 理论），这是人类历史上第一次统一引力和电磁相互作用的尝试，这种引入新的、被紧致化的维度的做法将通向弦论。

下面算一个例子。考虑非常经典的最优控制问题：

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = u \quad \min \int \frac{1}{2} u^2 dt$$

按照极大值原理的做法，哈氏量是  $\mathcal{H} = p_1 x_2 + p_2 u - \frac{1}{2} u^2$ ，最优控制律是  $u = p_2$ ，代入后得到哈密顿量  $\mathcal{H} = p_1 x_2 + \frac{1}{2} p_2^2$ ，加上我们之前提到的  $\epsilon$ -修正，并变成拉氏量：

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \epsilon p_1^2 + p_1 x_2 + \frac{1}{2} (1 + \epsilon) p_2^2 \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{x}_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2(1 + \epsilon)} \dot{x}_2^2$$

对比得：

$$m_{11} = \frac{1}{\epsilon}, \quad m_{22} = \frac{1}{(1 + \epsilon)}, \quad A_1(x) = -\frac{x_2}{\epsilon}, \quad \phi(x) = -\frac{\epsilon}{x_2^2 + C}$$

不妨取  $C = 1$ , 构造度规:

$$(dl)^2 = \frac{1}{\epsilon}(dx_1)^2 + \frac{1}{(1+\epsilon)}(dx_2)^2 - \frac{\epsilon}{(x_2^2+1)}\left(ds - \frac{x_2}{\epsilon}dx_1\right)^2$$

仍然用 E-L 方程把它的测地线做出来, 令:

$$\bar{\mathcal{L}} = \frac{1}{2\epsilon}(\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2(1+\epsilon)}(\dot{x}_2)^2 - \frac{\epsilon}{2(x_2^2+1)}\left(\dot{s} - \frac{x_2}{\epsilon}\dot{x}_1\right)^2$$

首先,  $s$  是循环坐标, 所以:

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{s}} = -\frac{\partial \epsilon}{\partial (x_2^2+1)}\left(\dot{s} - \frac{x_2}{\epsilon}\dot{x}_1\right) = C_1 = 1$$

$x_1$  也是循环坐标, 所以:

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{x}_1} = \frac{1}{\epsilon}\dot{x}_1 + \frac{\epsilon}{(x_2^2+1)}\left(\dot{s} - \frac{x_2}{\epsilon}\dot{x}_1\right)\frac{x_2}{\epsilon} = C_2 \Rightarrow \dot{x}_1 = x_2 + \epsilon C_2$$

对  $x_2$  的 E-L 方程给出:

$$-\frac{1}{1+\epsilon}\ddot{x}_2 + \frac{\epsilon}{(x_2^2+1)^2}x_2\left(\dot{s} - \frac{x_2}{\epsilon}\dot{x}_1\right)^2 + \frac{\epsilon}{(x_2^2+1)}\left(\dot{s} - \frac{x_2}{\epsilon}\dot{x}_1\right)\frac{\dot{x}_1}{\epsilon} \Rightarrow \ddot{x}_2 = (1+\epsilon)C_2$$

取  $\epsilon \rightarrow 0$ , 立刻得到这个最优控制问题的解:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \ddot{x}_2 = C_2 \Rightarrow x_1(t) = A(t-t_0)^3 + B(t-t_0)^2 + C(t-t_0) + D$$

## 第2章 核心抑制篇

## 2.1 核心抑制：核电，轻而易举啊！

龙之研究 (<https://www.mcmod.cn/class/423.html>) 是一个邪恶的模组，凭借一己之力创造了 Minecraft 科技模组中最容易爆炸的反应堆之一。本节中我们研究神龙反应堆的一些性质。



图 2.1: 使用通用机械的纸箱可以将失控的反应堆包装起来，这样你就获得了便携核弹。(图源 B 站 UP 主 @ 沐星团子)

### 2.1.1 反应堆的状态空间模型

据官方代码 (<https://github.com/Draconic-Inc/Draconic-Evolution>), 该反应堆可由离散时间状态空间模型建模：状态变量包括  $x_1(t)$ /反应堆温度,  $x_2(t)$ /反应堆能量缓存,  $x_3(t)$ /反应堆控制场,  $x_4(t)$ /燃料消耗进度；控制变量包括  $u_1(t)$ /从反应堆缓存中提取的能量,  $u_2(t)$ /向反应堆控制场中输入的能量。

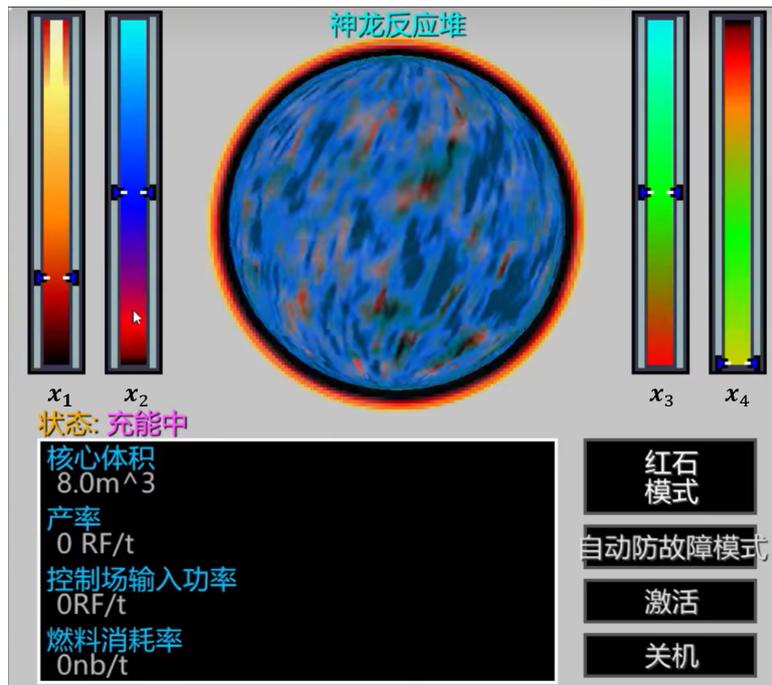


图 2.2: 在反应堆的 GUI 中，你可以读取四个状态变量（图源 B 站 UP 主 @ 安逸菌）

简便起见，在写出状态空间模型时使用以下辅助变量：

- 能量饱和度

$$\rho_{sat}(x_2) = \text{clamp}\left(\frac{x_2}{E_{max}}, [0, 1]\right)$$

- 燃料转化水平

$$\lambda_{conv}(x_4) = \left(\frac{x_4}{F_{total}} \times 1.3\right) - 0.3$$

- 温度乘数

$$\eta(x_1) = \begin{cases} 1 + (x_1 - 8000)^2 \times 2.5 \times 10^{-6} & x_1 > 8000 \\ 1 & 2000 < x_1 \leq 8000 \\ \frac{x_1 - 1000}{1000} & 1000 < x_1 \leq 2000 \\ 0 & x_1 \leq 1000 \end{cases}$$

- 基础发电量

$$G_{base} = \frac{E_{max}}{1000} \times 15$$

- 反向饱和度

$$N_{sat}(x_2) = (1 - \rho_{sat}(x_2)) \times 99$$

- 升温阻力系数

$$T_{50}(x_1) = \min\left(\frac{x_1}{T_{max}} \times 50, 99\right)$$

- 升温部分

$$T_{rise}(x_2) = \frac{N_{sat}^3(x_2)}{100 - N_{sat}(x_2)} + 444.7$$

- 降温部分

$$T_{resist}(x_1) = \frac{T_{50}^4(x_1)}{100 - T_{50}(x_1)}$$

- 能量产生速率

$$G_{rate}(x_2, x_4) = (1 - \rho_{sat}(x_2)) \cdot G_{base} \cdot (1 + 2\lambda_{conv}(x_4))$$

- 护盾消耗速率

$$D_{sh}(x_1, x_2) = \eta(x_1) \cdot \max(0.01, 1 - \rho_{sat}(x_2)) \cdot \frac{G_{base}}{10.923556}$$

- 燃料消耗速率

$$F_{use}(x_1, x_2) = \eta(x_1) \cdot (1 - \rho_{sat}(x_2)) \cdot 0.005$$

状态空间模型如下，其中时间  $t$  的单位是 Game Tick /  $\frac{1}{20}$ sec.:

$$x_1(t+1) = x_1(t) + \frac{10}{10000} [T_{rise}(x_2(t)) - T_{resist}(x_1(t))(1 - \lambda_{conv}(x_4(t))) + 1000\lambda_{conv}(x_4(t))]$$

$$x_2(t+1) = x_2(t) - u_1(t) + G_{rate}(x_2(t), x_4(t))$$

$$x_3(t+1) = x_3(t) + u_2(t) - D_{sh}(x_1(t+1), x_2(t))$$

$$x_4(t+1) = x_4(t) + F_{use}(x_1(t+1), x_2(t))$$

### 2.1.2 瞬时最大功率控制器

一个很显然的想法是把这个反应堆稳定在某种平衡状态上，让它安稳地度过一生。首先，对于无输入系统  $u_1(t) = u_2(t) = 0$ ，不存在平衡态。对于有输入系统，由于你无法控制随时间单增的  $x_4(t)$ ，系统也没有平衡态。但是，相比于其他状态变量， $x_4(t)$  的变化速度极慢，不妨假设在其余变量向平衡态弛豫的过程中  $x_4$  不变，这样仍可分析系统  $(x_1, x_2, x_3)$  的平衡态。

另一个可以观察到的重要性质是（在  $x_4$  慢变假设下） $(x_1, x_2)$  组成一个子系统，该子系统只能影响外界（此处特指  $x_3$ ），无法受外界影响。由  $x_1$  的平衡条件可以给出  $x_1(t), x_2(t)$  间满足的方程，解这个方程可获得  $x_1 \mapsto x_2$  的一一到上映射；由  $x_2$  的平衡条件可以给出  $u_1(t) = G_{rate}(x_2(t), x_4)$ ，由此可得到  $x_2 \mapsto u_1$  的一一到上映射。因此， $(x_1, x_2)$  这个子系统的平衡态可以通过指定平衡态上的  $x_1, x_2, u_1$  中任意一者来唯一确定。另外，通过  $x_1(t)$  满足的方程可知：若  $x_1(t)$  受扰动上升，系统的升温速度  $T_{rise}$  不变，而降温速度  $T_{resist}$  上升，因此  $x_1(t)$  将自动回到平衡态，反之亦然；根据  $x_2(t)$  满足的方程可知：若  $x_2(t)$  受扰动上升，能量产生速率  $G_{rate}$  将下降，而能量提取速度不变，因此  $x_2(t)$  将自动回到平衡态，反之亦然。因此子系统  $(x_1, x_2)$  的任一平衡态都是稳定平衡（当然要严格说这件事的话，需要在平衡点附近线性化动力学方程，检查  $x(t+1) = Ax(t) + B$  中矩阵  $A$  的本征值）。通过求解  $x_3$  的平衡方程立刻得到  $u_2(t) = D_{sh}(x_1(t+1), x_2(t))$ ，这给出平衡时需要的  $u_2(t)$ 。由于  $x_3(t+1) - x_3(t) = \dots$  的等号右侧不含  $x_3$ ，且  $x_3$  无法影响  $x_1, x_2$ ，因此  $x_3(t)$  是随遇平衡。

根据以上分析，我们很容易设计一种瞬时最高发电功率控制器。平衡态上的瞬时发电功率是：

$$P_{gen} = u_1(t) - u_2(t) = u_1(x_1) - D_{sh}(x_1(t+1), x_2(t)) = u_1(x_1) - D_{sh}(x_1)$$

寻找瞬时最大发电功率的问题是一个单变量优化问题，很容易对每个燃料消耗进度  $x_4$  找到瞬时发电功率最大的温度  $x_1^*$ 。找到  $x_1^*$  后，通过向系统输入能量  $u_1(x_1^*)$ （这个值通过  $x_1, x_2$  的平衡方程解出）来将子系统  $(x_1, x_2)$  移动到平衡点上，设置抽取速率  $u_2 = D_{sh}$ ，再为此时随遇平衡的  $x_3$  单独设置一个比例控制器，将它稳定在某个目标值上即可。

我们给出不同燃料消耗进度  $x_4$  下反应堆的工作特性曲线（平衡点上， $u_1(x_1) - u_2(x_1)$  和  $x_2(x_1)$  曲线），以及在这种瞬时最大发电策略下反应堆的运行全过程（直到 90% 燃料被消耗为止）。

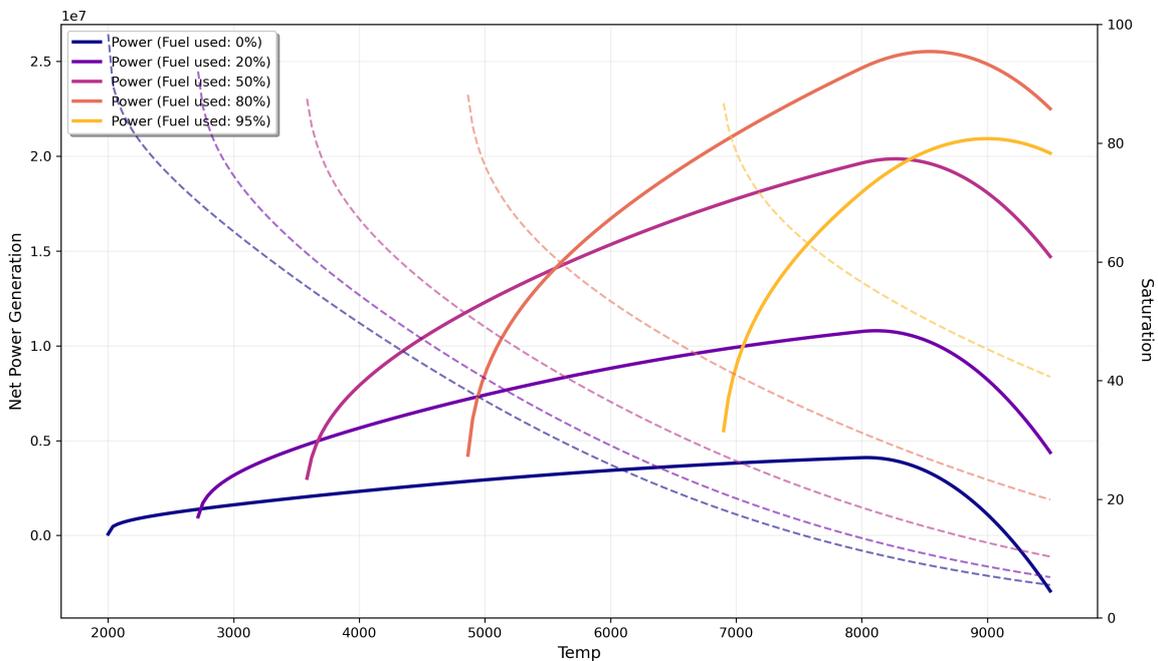


图 2.3: 不同燃料消耗进度下反应堆的工作特性曲线。随着燃料消耗，反应堆最大功率对应的温度上移；最大功率先增后减。（左轴：净发电量；右轴：电量缓存）

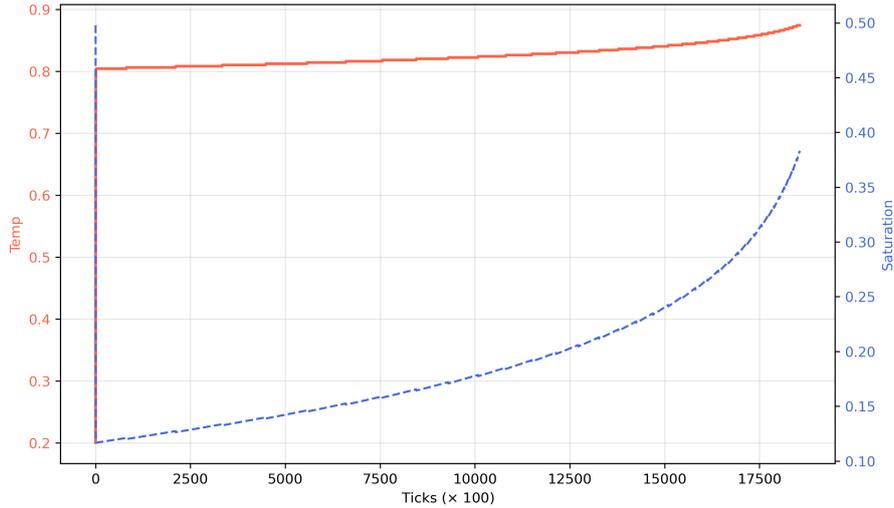


图 2.4: 最大瞬时功率控制下反应堆的运行全程。随着燃料消耗，控制器逐渐上移反应堆的工作温度  $x_1$ 。(左轴：温度/最大温度；右轴：电量缓存/最大电量缓存)

### 2.1.3 全程最大发电量控制器

燃料充足时，你可以使用最大瞬时功率控制器；燃料不足时，你可能需要全程最大发电控制器：指定关机时燃料消耗的比例  $x_{4,f}$ ，最大化（原则上这里应该写求和）：

$$J[u_1, u_2] = \int_0^{t_f} [u_1(t) - u_2(t)] dt \quad x_4(t_f) = x_{4,f}$$

这是一个终端时间不固定，但是（部分）终端状态固定的问题。在求解这个问题之前，我们需要对其做两点简化：首先，（就算不采用  $x_4$  慢变近似） $x_3(t)$  只能受到其他变量的影响，而不能影响其他变量，因此我们可以令  $u_2(t) = D_{sh}$ ，并将  $x_3(t)$  稳定在任意合法值上。这样，我们只有一个控制变量：

$$J[u_1] = \int_0^{t_f} [u_1(t) - D_{sh}(x_1(t+1), x_2(t))] dt := \int_0^{t_f} [u_1(t) - \hat{D}_{sh}(x_1(t), x_2(t), x_4(t))] dt$$

其中  $\hat{D}_{sh}(x_1(t), x_2(t), x_4(t))$  是将  $x_1(t+1)$  带入  $D_{sh}(x_1(t+1), x_2(t))$  中得到的。此外，作为一个终端时间自由的问题，不适合通过初始化终端时刻的值函数，然后反向递推的方式求解。当然，你可以使用 Value Iteration 算出值函数，但是对于本例，我们有随时间单增的  $x_4(t)$ ，且终端时  $x_4(t)$  固定，因此我们可以将  $x_4(t)$  作为新的时间。考虑  $x_4(t)$  的动力学方程：

$$x_4(t+1) = x_4(t) + F_{use}(x_1(t+1), x_2(t)) := \hat{F}_{use}(x_1(t), x_2(t), x_4(t))$$

这里的  $\hat{F}_{use}(x_1(t), x_2(t), x_4(t))$  也是将  $x_1(t+1)$  带入  $F_{use}(x_1(t+1), x_2(t))$  得到的。也就是说，每消耗  $\Delta f$  单位的燃料，时间前进

$$\Delta t = \frac{\Delta f}{\hat{F}_{use}(x_1(t), x_2(t), x_4(t))}$$

我可以将  $x_1(t), x_2(t)$  的动力学方程改写为：

$$x_1(x_4 + \Delta x_4) = x_1(x_4) + \left( \frac{10}{10000} [T_{rise}(x_2(x_4)) - T_{resist}(x_1(x_4))(1 - \lambda_{conv}(x_4))] + 1000\lambda_{conv}(x_4) \right) \cdot \frac{\Delta x_4}{\hat{F}_{use}(x_1, x_2, x_4)}$$

$$x_2(x_4 + \Delta x_4) = x_2(x_4) - (u_1 + G_{rate}(x_2(x_4), x_4)) \cdot \frac{\Delta x_4}{\hat{F}_{use}(x_1, x_2, x_4)}$$

性能指标：

$$J[u_1] = \int_0^{x_{4,f}} [u_1(x_4) - \hat{D}_{sh}(x_1(x_4), x_2(x_4), x_4)] \frac{1}{\hat{F}_{use}(x_1, x_2, x_4)} dx_4$$

之后，这个问题可以通过离散化状态空间  $(x_1, x_2)$ 、等效的时间步  $x_4$  以及控制变量  $u_1$  来求解。这里直接给出最大发电量控制律下反应堆的运行过程：

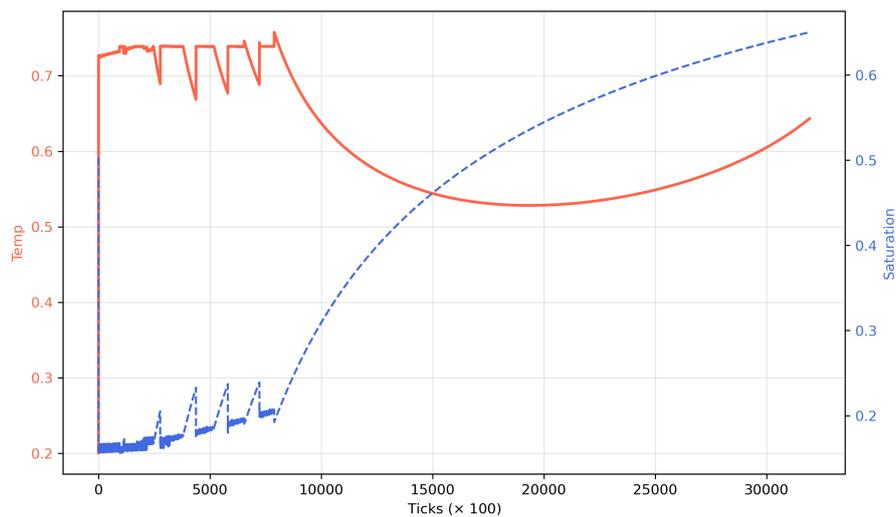


图 2.5: 最大发电量控制下反应堆的运行全程。(左轴：温度/最大温度；右轴：电量缓存/最大电量缓存)

## 2.2 核心抑制：人生海海，山山而川