

经典力学拾遗

#Classcal_Mechanics

我们在这里总结经典力学中一些比较困难或重要的内容（可以视作经典力学 II 周目）。这些内容来自求真书院李思的教材。

I 周目比较艰难的内容

Review of Classical Mechanics

Noether's Theorem

称在广义坐标的某个微小变化下，变化前后的拉氏量只差一个对时间的全导数，那么称这个微小变化是无穷小对称性。例如，取无穷小变换 $\delta_\epsilon q = \epsilon x(q, \dot{q}, t)$ ，计算拉氏量的变化：

$$\begin{aligned}
\delta_\epsilon L &= (\delta_\epsilon q) \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{d}{dt} (\delta_\epsilon q) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \\
&= \epsilon \left(x \frac{\partial L}{\partial q} + \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \\
&= \epsilon \frac{d}{dt} l(q, \dot{q}, t) \quad (*) \\
\frac{d}{dt} l(q, \dot{q}, t) &= \dot{q} \frac{\partial l}{\partial q} + \ddot{q} \frac{\partial l}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial l}{\partial t}
\end{aligned}$$

为了证明一般情形的 Noether's Theorem，我们考虑时间依赖的无穷小变换： $\delta_{\epsilon(t)} q = \epsilon(t)x$ ，此时推出拉氏量的无穷小变换：

$$\begin{aligned}
\delta_{\epsilon(t)} L &= (\delta_{\epsilon(t)} q) \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{d}{dt} (\delta_{\epsilon(t)} q) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \\
&= \epsilon(t)x \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{d}{dt} (\epsilon(t)x) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \\
&= \epsilon(t)x \frac{\partial L}{\partial q} + \epsilon(t)\dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \dot{\epsilon}(t)x \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \\
&= \epsilon(t) \frac{d}{dt} l + \dot{\epsilon}(t)(\dots)
\end{aligned}$$

其中最后一步使用了上文中的 (*) 式。对于更一般的力学系统，在拉氏量中可以含有 q 的二阶及以上导数，则在上式中也将含有 $\epsilon(t)$ 的高阶导数。但不管含有 $\epsilon(t)$ 的几阶导数，在计算作用量的变化时：

$$\delta_{\epsilon(t)} S = \int \epsilon(t) \left[\frac{d}{dt} l + \dot{\epsilon}(t)(\dots) + \ddot{\epsilon}(t)(\dots) \right] dt = \int \epsilon(t) \left(\frac{d}{dt} \mathcal{J} \right) dt$$

我总可以通过分部积分把对时间的导数从 $\epsilon(t)$ 上转移走。注意：虽然 ϵx 是一个无穷小对称变换，但是 $\epsilon(t)x$ 中由于 ϵ 含时，已经不是系统的无穷小对称性了。此时 $\delta_{\epsilon(t)} S = 0$ 是由最小作用量原理保证的。由于 $\epsilon(t)$ 的任意性，必有：

$$\frac{d}{dt} \mathcal{J}(t) = 0$$

于是我们就找到了守恒量。对于最简单的 $L = L(q, \dot{q}, t)$ 的情形，很容易通过上面读出步骤看出这个守恒量是

$$\mathcal{J} = l - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} x$$

Poisson Bracket

如果不是从几何的角度出发，那么我们引入泊松括号的目的是更方便地写出相空间上函数随着时间的演化。称由 $\{q_i, p_i\}$ 与 t 张成的空间为扩展相空间，考虑其上的函数：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(q(t), p(t), t) &= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}\end{aligned}$$

引入泊松括号：

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i}$$

那么上面函数的演化重写为：

$$\frac{d}{dt}f(q, p, t) = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

它有如下性质：

- 反对称性、双线性性
- 莱布尼兹律： $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$
- 雅可比恒等式： $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\}$

雅可比恒等式使得泊松括号可以生成新的运动积分，由于：

$$\{\{f, g\}, H\} + \{\{g, H\}, f\} + \{\{H, f\}, g\} = 0$$

因此若 $f(q, p), g(q, p)$ 是运动积分，则 $\{f, g\}$ 也是。此外有基本对易关系：

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \{J_i, J_j\} = \epsilon_{ijk} J_k$$

Liouville's Theorem

流映射是相空间上单参数微分同胚群： $\phi_t((q(0), p(0))) = (q(t), p(t))$ ， $\phi_{t_1} \circ \phi_{t_2} = \phi_{t_1+t_2}$ 。刘维尔定理指出，相空间体积元在哈密顿演化下保持不变，即：

$$Vol(\phi_t(D)) = Vol(D)$$

这等价于：

$$V(t) = Volume(\phi_t(D)) \quad \frac{d}{dt}V(t) = 0$$

为证明这一点，先考虑一般情形：考虑由 ODE 系统

$$\frac{d}{dt}x_i(t) = f_i(x, t)$$

诱导的流 ϕ_t ，考虑 $\phi_t(D)$ 的体积：

$$\int_{\phi_t(D)} d^n x = \int_D \det \left(\frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \mathbf{x}} \right) d^n x$$

考虑 $t \ll 1$ ：

$$x_i(t) \sim x_i + t f_i(x, t) \quad \frac{\partial x_i(t)}{\partial x_j} = \delta_{ij} + t \partial_j f_i(x, t) \rightarrow 1 + t A$$

从而：

$$\det \left(\frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \mathbf{x}} \right) = \det(1 + tA) \sim 1 + t \text{tr}(A) = 1 + t \sum_i \partial_i f_i(x, t)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi_t(D)} d^n x = \int_D \partial_i f_i(x, t) = \int_D \nabla \cdot \mathbf{f}$$

对于哈密顿系统：

$$\nabla \cdot f = \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0$$

因此证出刘维尔定理。由于相空间内任意区域的体积在演化中保持不变，因此考虑粒子的概率密度 ρ ，满足 $\frac{d}{dt} \rho(q(t), p(t), t) = 0$ ，在 ρ 不显含 t ，那么该条件简化为：

$$\{\rho, H\} = 0 \Rightarrow \rho \propto \exp \left(-\frac{H}{kT} \right)$$

考虑 ϕ 是保体积的连续一一映射， $\phi: D \rightarrow D$ ，则在 D 中任意开域 U 中，存在一点 $x \in U$ ，使得 $\phi^n x \in U$ 。也就是说，任意开域 U 中一点 x 经过足够多次数的保体积映射后仍然会回到开域 U 中。考虑 $\phi(U), \phi^2(U), \dots$ ，由于 $Vol(D)$ 有限，必有 $k > l > 0$ 使得 $\phi^k(U) \cap \phi^l(U) \neq \emptyset$ ，两侧作用 ϕ^{-l} ，也就是说， $\phi^{k-l}(U) \cap U \neq \emptyset$ 。也就是说， U 中确实至少存在一点 x ，使得它被 ϕ 映射多次后的像仍在 U 中。这个现象被称为庞加莱回归。

Canonical Transformation

考虑坐标变换 $\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i(q, p), P_i(q, p)\}$ ，若：

$$\{Q_i, P_i\} = \delta_{ij}, \quad \{Q_i, Q_j\} = \{P_i, P_j\} = 0$$

则称该变换为正则变换。也就是说，如果不从几何的角度来看，正则变换就是保持泊松括号不变的变换。由以上定义可以推导出，对任意两个相空间中的可观测量：

$$\{\cdot, \cdot\}_{p,q} = \{\cdot, \cdot\}_{P,Q}$$

它们的泊松括号都是保持不变的。

在 (q, p) 相空间中，可观测量的演化方程是：

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}_{p,q}$$

假设正则变换是不含时的，那么在 (Q, P) 空间中：

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} f(Q(q, p), P(q, p), t) + \{f, H\}_{Q,P}$$

演化方程和之前是完全相同的。

下面说明无穷小正则变换是什么样子，设一个不含时的无穷小正则变换的形式是：

$$q_i \rightarrow Q_i = q_i + \epsilon F_i(q, p) \quad p_i \rightarrow P_i = p_i + \epsilon E_i(q, p)$$

为了确定 F_i, E_i 的具体形式，我们计算泊松括号：

$$\begin{aligned} \{Q_i, P_j\} &= \{q_i + \epsilon F_i, p_j + \epsilon E_j\} \\ &= \delta_{ij} + \epsilon(\{F_i, p_j\} + \{q_i, E_j\}) \\ &= \delta_{ij} + \epsilon \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_j} + \frac{\partial E_j}{\partial p_i} \right) \end{aligned}$$

为了使得泊松括号正确保持，必须有：

$$\frac{\partial F_i}{\partial p_j} + \frac{\partial E_j}{\partial p_i} = 0$$

同理，计算 $\{Q_i, Q_j\}$ 和 $\{P_i, P_j\}$ 得到另外两个约束条件：

$$\frac{\partial E_i}{\partial p_j} - \frac{\partial E_j}{\partial p_i} = 0 \quad \frac{\partial F_j}{\partial p_i} - \frac{\partial F_i}{\partial p_j} = 0$$

若要使得上面三个约束条件同时满足， F, E 只能被一个函数 G 生成：

$$F_i = \frac{\partial G}{\partial p_i} \quad E_i = -\frac{\partial G}{\partial q_i}$$

或者写成：

$$Q_i = q_i + \epsilon\{q_i, G\} \quad P_i = p_i + \epsilon\{p_i, G\}$$

通过在相空间中的每个点都执行一个无穷小正则变换，就得到相空间中的矢量场，沿着这个矢量场积分，就得到有限大的正则变换：

$$Q_i = Q_i(q, p, s), P_i = P_i(q, p, s) \quad \frac{\partial Q_i}{\partial s} = \{Q_i, G\}, \frac{\partial P_i}{\partial s} = \{P_i, G\}$$

下面考虑含时正则变换。设有正则变换 $(q_i, p_i) \rightarrow (Q_i(q, p, t), P_i(q, p, t))$ ，之前不含时的正则变换只是给相空间重新选了一组坐标，不会导致哈密顿量的变化，但是现在由于新的坐标显含时间，新的哈密顿量通常也显含时间，生成函数通常也显含时间。设旧哈密顿量 $H(p, q)$ ，新的哈密顿量 $K(P, Q)$ ，二者相差时间全导数。简便起见，设相空间只有 2 维，考虑新的广义坐标 Q 。在新的相空间 (P, Q) 中，它只是一个坐标，而非 (P, Q) 的含时函数，所以它的演化方程：

$$\frac{dQ}{dt} = \{Q, K\}_{P, Q} = \{Q(p, q, t), K\}_{p, q}$$

而在原相空间 (p, q) 中，由于正则变换是含时的，因此 Q 是坐标 (p, q) 的含时函数，从而有：

$$\frac{dQ}{dt} = \{Q, H\}_{p, q} + \frac{\partial Q(p, q, t)}{\partial t}$$

这两种理解得到的 Q 的演化方程相减，得到：

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \{Q, K - H\}_{p, q}$$

同理，考察 P 的演化：

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \{P, K - H\}_{p, q}$$

现在计算 $dQ \wedge dP$ ，其中：

$$dP = d_S P + \frac{\partial P}{\partial t} dt, \quad dQ = d_S Q + \frac{\partial Q}{\partial t} dt, \quad d_S P \wedge d_S Q = dp \wedge dq$$

最后一式是正则变换保持辛形式不变的性质。

$$\begin{aligned} dP \wedge dQ &= \left(d_S P + \frac{\partial P}{\partial t} dt \right) \wedge \left(d_S Q + \frac{\partial Q}{\partial t} dt \right) \\ &= d_S P \wedge d_S Q + dP \wedge \left(\frac{dQ}{dt} dt \right) + \left(\frac{dP}{dt} dt \right) \wedge dQ \\ &= dp \wedge dq + (\{Q, K - H\} dP - \{P, K - H\} dQ) \wedge dt \\ &= dp \wedge dq + \left(\frac{\partial(K - H)}{\partial P} dP - \frac{\partial(K - H)}{\partial Q} dQ \right) \wedge dt \\ &= dp \wedge dq + \left(\frac{\partial(K - H)}{\partial P} dP - \frac{\partial(K - H)}{\partial Q} dQ + \frac{\partial(K - H)}{\partial t} dt \right) \wedge dt \\ &= dp \wedge dq + d(K - H) \wedge dt \end{aligned}$$

从而：

$$\sum_i dp_i \wedge dq_i - dH \wedge dt = \sum_i dP_i \wedge dQ_i - dK \wedge dt$$

写成全微分形式：

$$d \left(\sum_i p_i dq_i - H dt - \sum_i P_i dQ_i + K dt \right) = 0$$

这意味着 $(\cdot)$ 中的东西可以写成某个函数的全（外）微分，那么：

$$\sum_i p_i dq_i - H dt - \sum_i P_i dQ_i + K dt = dF$$

这里的 F 就称为生成函数。此外，可以看出正则变换保持了一个 2-形式 $dp \wedge dq - dH \wedge dt$ 不变。取 (q, Q, t) 作为独立坐标，令 $p = p(q, Q, t), P = P(q, Q, t), F = F(q, Q, t)$ ，那么从上式中直接读出：

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}, (K - H) = \frac{\partial F}{\partial t}$$

作为另一个例子，希望选取 (q_i, P_i, t) 作为独立坐标，并把剩下的 (p_i, Q_i) 直接读出，那么需要在方程中直接出现 dq_i 和 dP_i ，那么考虑如下处理：

$$\sum_i p_i dq_i - H dt + \sum_i Q_i dP_i + K dt = d \left(F + \sum_i P_i Q_i \right) = dF_2$$

HJB Equation

HJB 方程有两种推导方法：一种是考虑以 (q_0, t_0) 为起点的真实路径的作用量。设 $\gamma, \bar{\gamma}$ 分别为构型空间和相空间上的真实轨迹，那么：

$$W_{q_0, t_0} = \int_{\gamma} L dt = \int_{\bar{\gamma}} p dq - H dt$$

考虑改变端点的影响：

$$\delta W = \delta \int_{t_0}^{\hat{t}} L(q, \dot{q}, t) dt = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_0}^{\hat{t}} = \sum_i p_i \delta q_i \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i$$

再考虑时间改变的影响，将前面一式代入得到：

$$\frac{\partial W}{\partial \hat{t}} = - \left(\sum p_i \dot{q}_i - L \right) = -H$$

所以拿到 HJB 方程：

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H \left(q, \frac{\partial W}{\partial q}, t \right) = 0$$

它的另一种物理意义可以从正则变换导出，考虑 $q_i, p_i, H = H(q_i, p_i, t)$ ，试着找一个 2 型正则变换，使得系统的哈氏量为 0：

$$K = H(q, p, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0 \Rightarrow H \left(q, \frac{\partial F_2}{\partial q}, t \right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$$

这就得到了 HJB 方程。这个方程是关于 $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ 和 t 的 PDE，那么它的解中包含 $n + 1$ 个常数，

$F_2 = F_2(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, t)$ ，由于这个方程中只含有 F_2 对时间或者对 t 的导数，因此显然有一个常数是加性常数：

$$F_2 = W(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n; t) + \alpha_{n+1}$$

由于新的哈氏量是 0，所以新的坐标 P_i, Q_i 都是常数。不妨取 $P_i = \alpha_i$ ，剩余的 Q_i ：

$$Q_i = \frac{\partial W}{\partial P_i} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} := \beta_i$$

从而可以反解出 $q_i = q_i(\alpha, \beta, t)$ 。

Symplectic Geometry

Vector Field and Differential Form

推前映射

推前映射的显式写法：设有两个开集 U_1, U_2 ，上面分别有两套坐标系 $\{x\}, \{y\}$ ，对坐标基底的推前映射是

$$\phi_* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j}$$

所以对于一个矢量的推前：

$$\phi_* \left(\sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi^i \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_i}$$

定义一个操作（缩并）是将 1-形式到标量场的映射，以 $\iota_V \alpha$ 记。显然：

$$\iota_V(df) = \sum_i V^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = V(f) \quad \alpha_i(x) = \iota_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \alpha$$

外微分

有一个唯一的 $d : \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^{p+1}(U)$ 的映射同时满足以下性质：

- 线性性
- 在 $p = 0$ 时效果回退到全微分 $f \mapsto df$
- $d^2(\cdot) = 0$
- Graded Leibnitz Rule: $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$, 若 α 是 p -形式。

考虑寻找这个映射：取任意 p -形式：

$$\alpha = \frac{1}{p!} \sum_{i_1 \dots i_p} \alpha_{i_1 \dots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

这里在系数上除以 $\frac{1}{p!}$ 是因为 $\sum_{i_1 \dots i_p}$ 对所有可能的下标组合求和了，这导致同一个东西被重复计算了 $p!$ 次。考虑将映射 d 作用到后面这个基底上：

$$\begin{aligned} d(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) &= d(dx^{i_1}) \wedge (dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) - (dx^{i_1}) \wedge d(\dots) \\ &= 0 - (dx^{i_1}) \wedge d(dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) \end{aligned}$$

显然，这个过程可以被持续下去，最终将得到 0。那么：

$$\begin{aligned} d\alpha &= \frac{1}{p!} \sum_{i_1 \dots i_p} d\alpha_{i_1 \dots i_p}(x) \wedge (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{k, i_1 \dots i_p} \partial_k \alpha_{i_1 \dots i_p}(x) (dx^k) \wedge (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) \end{aligned}$$

这个操作称为外微分。例如考虑一个 1-形式： $\alpha = \sum_i \alpha_i dx^i$, $d\alpha = \sum_{i,j} \partial_j \alpha_i dx^j \wedge dx^i$

拉回映射

对函数的拉回映射是简单的：考虑 $\phi : U_1 \rightarrow U_2$, U_2 有标量场 f , 定义 $\phi^* f = f(\phi(x)), x \in U_1$ 。对微分形式的拉回有简单的写法（将微分形式中的每一个函数都拉回）。设 U_2 上有形式：

$$\alpha = \frac{1}{p!} \sum_{i_1 \dots i_p} \alpha_{i_1 \dots i_p}(y) dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_p}$$

那么：

$$\begin{aligned} \phi^* \alpha &= \frac{1}{p!} \sum_{i_1 \dots i_p} \phi^* \alpha_{i_1 \dots i_p}(y) d\phi^*(y^{i_1}) \wedge \dots \wedge d\phi^*(y^{i_p}) \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{i_1 \dots i_p} \alpha_{i_1 \dots i_p}(\phi(x)) d(\phi^{i_1}(x)) \wedge \dots \wedge d(\phi^{i_p}(x)) \end{aligned}$$

这样的定义使得拉回映射有性质：

- 与外微分的相容性： $d(\phi^* \alpha) = \phi^*(d\alpha)$
- 与楔形积的相容性： $\phi^*(\alpha \wedge \beta) = \phi^*(\alpha) \wedge \phi^*(\beta)$

Lie 导数

从拉回映射的定义自然衍生出 Lie 导数的定义，Lie 导数衡量一个张量沿着流的变化率：

$$\mathcal{L}_V \alpha = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \phi_t^*(\alpha)$$

性质：

- (来自拉回的性质) $\mathcal{L}_V(d\alpha) = d(\mathcal{L}_V \alpha)$
- Leibnitz Rule $\mathcal{L}_V(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{L}_V(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_V(\beta)$

显式表达式：考虑 p -形式：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V \alpha &= \frac{1}{p!} \sum_{i_1 \dots i_p} \mathcal{L}_V(\alpha_{i_1 \dots i_p}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} + \alpha_{i_1 \dots i_p} \mathcal{L}_V(dx^{i_1}) \wedge \dots \wedge dx^{i_p} + \dots \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{i_1 \dots i_p} V(\alpha_{i_1 \dots i_p}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} + \alpha_{i_1 \dots i_p} d(\mathcal{L}_V(x^{i_1})) \wedge \dots \wedge dx^{i_p} + \dots \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{i_1 \dots i_p} V(\alpha_{i_1 \dots i_p}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} + \frac{1}{p!} \sum_{i_1 \dots i_p, k} \alpha_{i_1 \dots i_p} \partial_k V(x^{i_1}) dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} + \dots \end{aligned}$$

特别地，若坐标系选取恰当，使得 $V := \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}$ ，也即选取了矢量场的适配坐标系，那么显式表达式中只会剩下第一项。

广义 Stokes 定理

取 $\mathcal{J}$ 为 $\mathbb{R}^p$ 中可定向曲面， $\mathcal{K}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中可定向曲面。有微分同胚 $\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{K}$ ，有：

$$\int_{\mathcal{K}} \alpha = \int_{\phi(\mathcal{J})} \alpha = \int_{\mathcal{J}} \phi^* \alpha$$

下面的结果称为 Stokes 定理：

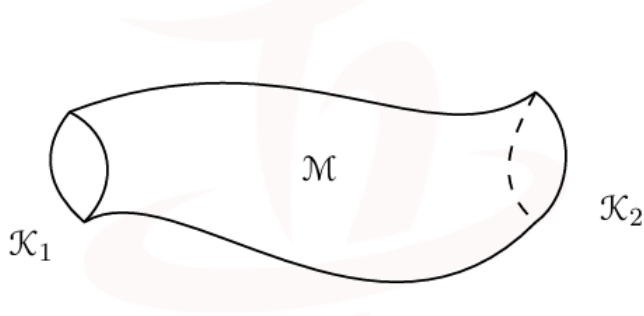
$$\int_{\mathcal{K}} d\alpha = \int_{\partial \mathcal{K}} \alpha$$

这个结果可以诱导出微积分中各个定理，例如微积分中的 Stokes 定理：取 1-形式 $\alpha = \alpha_1(x)dx^1 + \alpha_2(x)dx^2$ 。

$d\alpha = \partial_2 \alpha_1(x)dx^2 \wedge dx^1 + \partial_1 \alpha_2(x)dx^1 \wedge dx^2 = (\partial_1 \alpha_2 - \partial_2 \alpha_1)dx^1 \wedge dx^2$ ，由广义 Stokes 定理得到：

$$\int \int_{\mathcal{K}} (\partial_1 \alpha_2 - \partial_2 \alpha_1) dx^1 \wedge dx^2 = \int_{\partial \mathcal{K}} \alpha_1 dx^1 + \alpha_2 dx^2$$

Stokes 定理的重要应用是在时空 $3+1$ 分解后的空间面上定义守恒量。



考虑 α 是 Closed Form，如图所示是包含了很多粒子的世界管，在远处的边界上 $\alpha = 0$ ，仅在 K_1, K_2 两个边界上有取值。那么：

$$\int_{\partial M} \alpha = \int_{K_2} \alpha - \int_{K_1} \alpha = \int_M d\alpha = 0 \Rightarrow \int_{K_1} \alpha = \int_{K_2} \alpha$$

Cartan Formula and Poincare Lemma

Cartan 的魔法公式

上文中从流映射的角度定义了 Lie 导数，但实际上 Lie 导数也可被几个性质唯一确定：

- 在标量场上的作用： $\mathcal{L}_V(f) = V(f)$
- 与外微分可交换： $\mathcal{L}_V(d(\cdot)) = d(\mathcal{L}_V(\cdot))$
- Leibnitz Rule： $\mathcal{L}_V(\alpha \wedge \beta) = (\mathcal{L}_V\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathcal{L}_V\beta)$

容易从其定义验证这些性质，或者从这些性质导出 Lie 导数的显式表达式。下面定义矢量场与 p - 形式的缩并，得到 $(p-1)$ - 形式。注意到一个 p - 形式用抽象指标写出来：

$$\alpha_{a_1 \dots a_p} = \frac{1}{p!} \sum_{i_1 \dots i_p} \alpha_{i_1 \dots i_p}(x) (dx^{i_1})^{a_1} \wedge \dots \wedge \sum_{i_1 \dots i_p} (dx^{i_p})^{a_p}$$

这里的缩并是指让矢量场 V^{a_1} 和 p - 形式缩并：

$$\iota_V(\alpha) = \sum_{i_1 \dots i_p} \alpha_{i_1 \dots i_p} ((l_V dx^{i_1}) dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} - (l_V dx^{i_2}) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} + \dots)$$

可验证这个操作满足 Graded Leibnitz Rule：

$$\iota_V(\alpha \wedge \beta) = (\iota_V\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (\iota_V\beta)$$

前文中定义了三个映射： $\mathcal{L}_V, d, \iota_V$ ，三者之间的关系由 Cartan 的魔法公式给出：

$$\mathcal{L}_V(\cdot) = d\iota_V(\cdot) + \iota_V d(\cdot)$$

要证明魔法公式，只需说明右侧的东西满足可以唯一确定 Lie 导数的三条性质。记 $D_V(\cdot) = d\iota_V(\cdot) + \iota_V d(\cdot)$ 。

验证性质 1（对标量场的作用）：

$$\begin{aligned} D_V(f) &= d\iota_V(f) + \iota_V d(f) \\ &= \iota_V df \\ &= V(f) = \mathcal{L}_V(f) \end{aligned}$$

验证性质 2（与外微分可交换）：

$$\begin{aligned} D_V(df) &= (d\iota_V + \iota_V d)df \\ &= d\iota_V(df) \\ &= dV(f) \\ &= dD_V(f) \end{aligned}$$

验证性质 3（Lebnitz 律）：

$$\begin{aligned} D_V(\alpha \wedge \beta) &= (d\iota_V + \iota_V d)(\alpha \wedge \beta) \\ &= d(\iota_V\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge \iota_V\beta) + \iota_V(d\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge (-1)^p d\beta) \end{aligned}$$

分别看这两部分：

$$d(\iota_V\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge \iota_V\beta) = d(\iota_V\alpha) \wedge \beta + (-1)^{p-1} \iota_V\alpha \wedge d\beta + (-1)^p d\alpha \wedge \iota_V\beta + (-1)^{2p} \alpha \wedge d(\iota_V\beta)$$

另一部分也产生类似的四项。注意到 $(-1)^p$ 与 $(-1)^{p-1}$ 必然有相反符号，所以中间的四项可以消掉。最终剩下的结果是：

$$D_V(\alpha \wedge \beta) = (d\iota_V + \iota_V d)\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge (d\iota_V + \iota_V d)\beta$$

这就验证了性质 3。

直接给出关于这三个映射的更多性质：

- Lie 导数的对易子： $[\mathcal{L}_V, \mathcal{L}_W] = \mathcal{L}_{[V, W]}$
- 缩并操作的反对称性： $\iota_V \iota_W + \iota_W \iota_V = 0$
- Lie 导数与缩并操作的对易子： $[\mathcal{L}_V, \iota_W] = \iota_{[V, W]}$

对于第一条，可以直接对作用在标量场上的情况给予证明：

$$[\mathcal{L}_V, \mathcal{L}_W](f) = \mathcal{L}_V \mathcal{L}_W(f) - \mathcal{L}_W \mathcal{L}_V(f) = V(W(f)) - W(V(f)) = [V, W](f) = \mathcal{L}_{[V, W]}(f)$$

验证第二条性质，将两个缩并操作作用在 p -形式基底上：

$$\begin{aligned}\iota_V \iota_W (dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}) &= \iota_V \left(\sum_k (-1)^{k-1} W(x^{i_k}) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \cancel{dx^{i_k}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \right) \\ &= \sum_{j < k} V(x^{i_j}) W(x^{i_k}) ((-1)^{k+j-2} \cdots \wedge \cancel{j_j} \cdots \cancel{j_k} \wedge) + \sum_{j > k} (-1)^{k+j-3} (\text{c.t.})\end{aligned}$$

交换 V, W 得到

$$\sum_{j < k} V(x^{i_k}) W(x^{i_j}) ((-1)^{k+j-2} \cdots \wedge \cancel{j_j} \cdots \cancel{j_k} \wedge) + \sum_{j > k} (-1)^{k+j-3} (\text{c.t.})$$

直接将 j 重命名为 k ，将 k 重命名为 j ，第一项变成：

$$\sum_{j > k} V(x^{i_j}) W(x^{i_k}) ((-1)^{k+j-2} \cdots \wedge \cancel{j_k} \cdots \cancel{j_j} \wedge)$$

这和原来的第二项抵消了。同理，交换 V, W 后的第二项和原来第一项抵消。这验证了反对称性。

对于第三条， $[\mathcal{L}_V, \iota_W]$ 作用在标量场上的行为是平凡的，所以以它作用在 1 -形式上的行为为例：

$$[\mathcal{L}_V, \iota_W] \left(\sum_i \alpha_i dx^i \right) = (\mathcal{L}_V \iota_W - \iota_W \mathcal{L}_V) \left(\sum_i \alpha_i dx^i \right)$$

分别计算这两项：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_V \iota_W \left(\sum_i \alpha_i dx^i \right) &= \mathcal{L}_V \left(\sum_i \alpha_i W^i \right) \\ &= V \left(\sum_i \alpha_i W^i \right) \\ &= \sum_i V(\alpha_i) W^i \\ &= \sum_i V(\alpha_i) W^i + \sum_i \alpha_i V(W^i) \\ &= \sum_i V(\alpha_i) W^i + \sum_{i,k} \alpha_i V^k \partial_k W^i \\ \iota_W \mathcal{L}_V \left(\sum_i \alpha_i dx^i \right) &= \iota_W (\mathcal{L}_V(\alpha_i) dx^i + l_W \alpha_i d(\mathcal{L}_V(x^i))) \\ &= \iota_W (V(\alpha_i) dx^i) + l_W \alpha_i d(V(x^i)) \\ &= \sum_i V(\alpha_i) W^i + l_W \alpha_i \partial_k V(x^i) dx^k \\ &= \sum_i V(\alpha_i) W^i + \sum_{i,k} \alpha_i \partial_k V(x^i) W^k \\ &= \sum_i V(\alpha_i) W^i + \sum_{i,k} \alpha_i W^k \partial_k V^i\end{aligned}$$

所以，原式：

$$[\mathcal{L}_V, \iota_W] \left(\sum_i \alpha_i dx^i \right) = \sum_{i,k} \alpha_i (V^k \partial_k W^i - W^k \partial_k V^i)$$

而

$$\begin{aligned}\iota_{[V,W]} \left(\sum_i \alpha_i dx^i \right) &= \sum_i \alpha_i [V, W]^i \\ &= \alpha_i (V^j \partial_j W^i - W^j \partial_j V^i)\end{aligned}$$

这就对最简单的情况完成了证明。

称一个微分形式是闭的 (Closed), 若 $d\alpha = 0$; 称微分形式是恰当 (Exact) 的, 若 $\alpha = d\beta$, 则称它恰当。为描述开集 U 的拓扑结构, 定义 p 阶 deRham 上同调群

$$H_{\text{dR}}^p(U) = \text{Closed } p\text{-form on } U / \text{exact } p\text{-form on } U$$

称 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是星形的, 若存在 $x_0 \in U$, 使得 $\forall x \in U$, x, x_0 的连线均在 U 中。庞加莱引理指出: 若开集 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是星形的, 则其任意阶 deRham 上同调群平凡。

我们将通过对于任意 α 直接构造 β , 使得 $\alpha = d\beta$ 的方式证明这一点。不妨设 $x_0 = 0$, 考虑映射 $\phi_t: U \rightarrow U$, $x \mapsto \exp(t)x (t \leq 0)$, 它连接了任意 $x \in U$ 与 $x_0 = 0$, 并且该映射是被 $V = x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 诱导的。对于任意 α , 改写:

$$\begin{aligned} \alpha &= \phi_0^*(\alpha) - \phi_{-\infty}^*(\alpha) \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{d}{dt}(\phi_t^*(\alpha)) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} (\phi_{t+\tau}^*(\alpha)) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 \mathcal{L}_V(\phi_t^*(\alpha)) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 (d\iota_V(\phi_t^*(\alpha)) - \iota_V d(\phi_t^*(\alpha))) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 d\iota_V(\phi_t^*(\alpha)) dt \\ &= d \left(\int_{-\infty}^0 \iota_V(\phi_t^*(\alpha)) dt \right) = d\beta \end{aligned}$$

这就完成了构造。

Symplectic Form

非退化的反对称双线性映射称为辛映射。设 ω 为 V 上辛映射, 取非零元 $e_1 \in V$, 由非退化性, 必找到 f_1 使得 $\omega(e_1, f_1) = 1$ 。可在 $\text{span}\{e_1, f_1\}$ 的正交补 (指 $\{u \in V | \omega(u, e_1) = \omega(u, f_1) = 0\}$) 中重复这个过程, 从而找到 $V = \text{span}\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ 且 $\omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0, \omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ 。与度规一样, ω 诱导降指标映射 $\tilde{\omega}: V \rightarrow V^*, v \mapsto \omega(v, \cdot)$ 。

取辛空间 (V, ω) , 其子空间 $L \subset V$ 称为迷向的 (Isotropic) 若 $\omega(u, v) = 0, \forall u, v \in L$ 。 L 的最大维数为 V 维数的一半。这是因为 $\tilde{\omega}: V \rightarrow V^*$ 诱导映射 $\tilde{\omega}_L: L \rightarrow (V/L)^*$ 。考虑在 $\omega(\cdot, \cdot)$ 的第一个槽位中装入 $u \in L$, 那么第二个槽位中装入 v 与 $v + w, w \in L$, 得到相同的结果, 从而 $\omega(u, \cdot)$ 可以被视为将 V/L 中矢量映射到实数的映射, 自然可以认为它是 $(V/L)^*$ 中的元素。下面说明它是单射: 若 $\exists u \in L, u \neq 0$, 使得 $\tilde{\omega}_L(u) = 0$, 也就是说对 $\forall v \in V, \omega(u, v) = 0$, 这与 ω 的非退化性矛盾, 从而只许有 $\tilde{\omega}_L(0) = 0$ 。这样推出:

$$\dim L \leq \dim V/L$$

也就说明了 $\dim L \leq \frac{1}{2} \dim V$ 。

可以在开集 U 中的每一点配备一个这样的映射 $\omega_p: T_p U \times T_p U \rightarrow \mathbb{R}$, ω 称为辛形式若它是闭的且点点非退化。取 U 上坐标系 $\{x^1, \dots, x^{2n}\}$, 辛形式可写成:

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_{ij} \omega_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j$$

取 f 为 U 上标量场, 称与之对应的哈密顿矢量场是:

$$V_f = \tilde{\omega}^{-1}(df) \Rightarrow \tilde{\omega}(V_f) = df \Rightarrow \iota_{V_f} \omega = df$$

辛形式 ω 在哈密顿矢量场生成的流映射下保持不变:

$$\mathcal{L}_{V_f}(\omega) = (d\iota_{V_f} + \iota_{V_f} d)\omega = d\iota_{V_f} \omega = dd f = 0$$

这直接给出刘维尔定理:

$$\mathcal{L}_{V_f} \left(\frac{\omega^n}{n!} \right) = 0$$

取 f, g 为 U 上标量场, 泊松括号 $\{ \cdot, \cdot \}$ 是 $C^\infty(U) \times C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$ 映射:

$$\{f, g\} = l_{V_f} l_{V_g}(\omega) = l_{V_f}(dg) = V_f(g)$$

Geometry of Canonical Transformations

考虑增广相空间 $U \times \mathbb{R} : \{q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n; t\}$ 和含时哈氏量 $H(q, p, t)$ 。取 2-形式 $\omega_H = \omega - dH \wedge dt$ 。定义读取时间的投影映射 $\pi : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 称一个增广相空间上的微分同胚 ϕ 是正则变换, 若:

- 该变换不改变时间: $\pi \circ \phi = \pi$
- $U \times \mathbb{R}$ 上有标量场 K 使得 $\phi^* \omega_K = \omega_H$
要理解第二条在说什么, 要看增广相空间上相流的生成元如何定义。这个生成元定义为:
- 时间匀速前进: $\pi_*(\chi_H) = \frac{\partial}{\partial t}$
- $\iota_{\chi_H} \omega_H = 0$
这两条可以唯一确定增广相空间上的矢量场:

$$\chi_H = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_i \left(\partial_{q_i} H \frac{\partial}{\partial p_i} - \partial_{p_i} H \frac{\partial}{\partial q_i} \right)$$

直接给出哈密顿方程。既然相流生成元是依赖于 ω_H 定义的, 那么含时正则变换的第二条要求就是说变换后的相流要被辛哈密顿量 K 生成。考虑 2-形式 $\omega_K = \sum_i dP_i \wedge dQ - dK \wedge dt$, $\phi^* \omega_K = \sum_i dP_i(q, p, t) \wedge dQ_i(q, p, t) - dK(Q(\cdot), P(\cdot), t)$ 。定义的第二条要求:

$$\sum_i dp_i \wedge dq_i - dH \wedge dt = \sum_i dP_i \wedge dQ_i - dK \wedge dt$$

从而:

$$\left(\sum_i p_i dq_i - H dt \right) - \left(\sum_i P_i dQ_i - K dt \right) = dF$$

F 就是生成函数。

利用一个结论:

$$\iota_X(\phi^* \alpha) = \phi^*(\iota_{\phi_* X} \alpha)$$

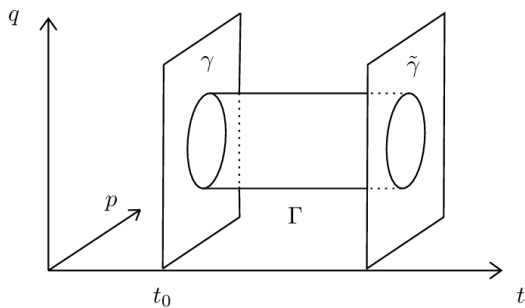
也即把新空间上的 α 拉回之后与 X 缩并所得之结果正如把 X 推前至新空间与 α 缩并后再拉回。由相流生成元的定义我们知道:

$$\phi^*(\iota_{\phi_* \chi_H} \omega_K) = \iota_{\chi_H}(\phi^* \omega_K) = \iota_{\chi_H} \omega_H = 0 \Rightarrow \iota_{\phi_* \chi_H} \omega_K = 0$$

同理推出 $\iota_{\phi_* \chi_H} dt = 1$, 这两个条件可以确定:

$$\phi_* \chi_H = \chi_K$$

也就是说新的相流就是旧的相流被推前后的结果。



考虑一些粒子在相空间中的世界线位于“世界管”的“管壁” Γ 上。由于 $\iota_{\chi_H}\omega_H = 0$ ，所以世界管管壁任意一点切空间内的任意矢量与 ω_H 的缩并都为 0，换言之， ω_H 是法于 Γ 的，从而它在 Γ 上的限制为 0，从而 $\int_{\Gamma}\omega_H = 0$ ，由于 $\omega_H = d\alpha = d(\sum_i p_i dq_i - Hdt)$ ，从而

$$\oint_{\tilde{\gamma}} \alpha - \oint_{\gamma} \alpha = \int_{\partial\Gamma} \alpha = \int_{\Gamma} d\alpha = 0 \Rightarrow \oint_{\tilde{\gamma}} \alpha = \oint_{\gamma} \alpha$$

这说明了简约作用量 $\oint_{\gamma}(\sum_i p_i dq_i)$ 为常值。

Syplectic Manifold

只介绍比较重要的一点。称辛流形的子流形 $L \subset M$ 是拉格朗日子流形，若 $\omega|_L = j^*(\omega) = 0$ ，且 $\dim L = \frac{1}{2}\dim M$ ， j 为 L 向 M 的嵌入映射。

例子：取辛流形 $(\mathbb{R}^{2n}, \omega = \sum_i dp_i \wedge dq_i)$ ，在其上指定 n 个标量场 $f_1(q) \cdots, f_n(q)$ ，考虑子流形 $L_f = \{(q_i, p_i) | p_i = f(q_i)\}$ ，从 l_f 到 M 的嵌入映射 $j_f : (q_1, \cdots, q_n) \mapsto (q_i, q_n, f(q_i), \cdots, f(q_n))$ 。记 $\alpha = \sum_i p_i dq_i$ ，定义要求

$$j_f^*(\omega) = 0 \Rightarrow j_f^*(d\alpha) = 0 \Rightarrow d(j_f^*(\alpha)) = 0 \Rightarrow j_f^*(\alpha) = dF \Rightarrow \sum_i f_i(q) dq_i = dF \Rightarrow f_i(q) = \frac{\partial F_i(q)}{\partial q_i}$$

Momentum Map

动量映射

称 Lie 群 G 在流形 M 上的作用为映射 $\rho : G \times M \rightarrow M, (g, m) \mapsto \rho_g(m)$ ，或者以 $g \cdot m$ 记。在第一槽位确定时，该映射是微分同胚；在第二槽位确定时，从 G 到映射的集合的映射是群同态。

一些基本定义：

- G 作用在 $x \in M$ 上所得轨道是所有可能出现的元素的集合： $G \cdot x = \{\rho_g(x) | g \in G\} \subset M$
- $x \in M$ 的稳定子群是不改变 x 的那些元素的集合： $G_x = \{g \in G | \rho_g(x) = x\}$
- G 在 M 上的作用将 M 划分为不交的轨道，定义轨道空间 M/G
- 称群作用是传递的，若 M/G 为单点，也就是说从 M 上任何一点出发，经过 G 的作用可以到达 M 上任何一点；称群作用是自由的，若 $G_x = e, \forall x$

一个 Lie 群可以与一个线性空间 $\mathfrak{g}$ 联系起来，例如取 $\mathfrak{g}$ 为 G 上左不变矢量场的集合。可认为 $\mathfrak{g}$ 是 G 生成元， $\mathfrak{g}$ 上有被称为 Lie Bracket 的映射 $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ ，它同样有双线性、反对称、满足雅可比恒等式的性质。

考虑 G 作用在 M 上。取 G 上曲线 $\gamma(t)$ 并 $\gamma(0) = e, \gamma'(t)|_{t=0} = A \in \mathfrak{g}$ 。 $\gamma(t) \cdot x$ 给出 M 上曲线，零

$V_A(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\gamma(t) \cdot x)$ ，即得到 M 上矢量场。所以有了 $\mathfrak{g} \rightarrow \text{Vect}(M)$ 的映射。或者可以认为 M 上的微分同胚构成无限维 Lie 群， G 在 M 上的作用给出了同态 $G \rightarrow \text{Diff}(M)$ ，自然有 Lie 代数同态 $\mathfrak{g} \rightarrow \text{Vect}(M)$ 。

取 (M, ω) 为辛流形，微分同胚映射 $\phi : M \rightarrow M$ 称为辛同胚，若它保持辛形式： $\phi^*\omega = \omega$ 。若对于某 Lie 群 G 有 $g^*\omega = \omega, \forall g \in G$ （此时称 G 对 M 的作用为保辛作用）。那么 $\mathcal{L}_{V_A}\omega = 0, \forall A \in \mathfrak{g}$ 。进而：

$$d\iota_{V_A}\omega = 0 \Rightarrow \iota_{V_A}\omega = df_A$$

进一步地，称 G 对 M 的保辛作用是哈密顿作用，若有映射 $\mathcal{H} : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(M)$ ，使得

- $\iota_{v_A}\omega = d\mathcal{H}_A$

- $\{\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B\} = \mathcal{H}_{[A,B]}$

也就是说，我们本来能把 Lie 代数中元素与 M 上矢量场建立关联，哈密顿作用进一步要求这个矢量场是能够被一个标量场生成的哈密顿矢量场。条件 2 可以视作消除了 $\mathcal{H}_{(\cdot)}$ 随意平移一个常数的规范自由性。 $\mathcal{H}_{(\cdot)}(x)$ 吃掉 $\mathfrak{g}$ 中元素吐出一个标量，也就是说，它将 M 上每一点映射到 $\mathfrak{g}^*$ 中元素，这个 $M \mapsto \mathfrak{g}^*$ 的映射称为动量映射。

前面我们只要求了 G 对 M 的作用是保辛的哈密顿作用，现在考虑 G 就是系统的对称群，也就是说额外要求系统哈氏量 H 满足 $\mathcal{L}_{V_A}(H) = V_A(H) = 0$ ，那么：

$$\{H, \mathcal{H}_A\} = \iota_{V_H} \iota_{V_A}(\omega) = -\iota_{V_A} \iota_{V_H}(\omega) = -\iota_{V_A}(dH) = -V_A(H) = -\mathcal{L}_{V_A}(H) = 0$$

从而系统对称群 G 对系统的哈密顿作用所得 M 上矢量场的生成函数 $\mathcal{H}_A$ 是运动积分。

例子：考虑平移作用， $a \cdot (x, p) = (x + a, p)$ ， $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^n$ ，与 $\mathfrak{g}$ 的基底 e_i 对应的 M 上的矢量场为 $V_{e_i} = \frac{\partial}{\partial x^i}$ ，按定义得到 $\mathcal{H}_{e_i}(x) = -p_i$ 。所以动量映射 $\mathcal{H}_{(\cdot)}(x)$ 将 x 映射到 $\mathfrak{g}^*$ 中分量为 $(-p_1, \dots, -p_n)$ 的元素。

例子：考虑 $U(1)$ 的作用：

$$\exp(i\theta) : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

不难验证它保辛，且：

$$V_e|_{(x,y)} = \frac{\partial}{\partial \theta}|_{\theta=0} \exp(i\theta) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \Rightarrow V_e = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$$

根据定义：

$$\iota_{V_e} \omega = -y dy - x dx = d \left(-\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2 \right) \Rightarrow \mathcal{H} = -\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2$$

这个 $-\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2$ 就是映射到的 $\mathfrak{g}^*$ 中对偶矢量的分量。

例子：考虑 $GL_N(\mathbb{R})$ 的作用，一个合法的保辛作用是：

$$A : \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} Ax \\ (A^T)^{-1}p \end{bmatrix}$$

根据定义：

$$V_A = \sum_{ij} A_{ij} x_j \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{ij} A_{ij} p_j \frac{\partial}{\partial p_i} \Rightarrow \mathcal{H}_A = - \sum_{ij} A_{ij} p_i x_j$$

从而 $\mu(x, p) = -p_i x_j$ 。

直观上，可以看出 $\mathfrak{g}^*$ 的坐标就是系统的各个守恒量。

辛约化

对于有 $2n$ 维相空间的系统，找到一个约束可以使得其自由度下降 2 维。一个最简单的例子：考虑哈密顿在系统 (M, ω, H) ，系统有运动积分 f ， $V_f = \tilde{\omega}^{-1}(df)$ 生成相流 ρ_t ，可以将这个 f 视为系统对称群作用在系统上得到的矢量场的生成函数。显然这个对称群是一维的， $f(x)$ 自身就是 x 被映射到 $\mathfrak{g}^*$ 中那个元素的分量。取局域辛坐标系 $\{q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n\}$ ，不失一般性可取 $p_n = f$ ，这样系统自由度降低 1。此外：

$$\{H, f\} = 0 \Rightarrow \{H, p_n\} = \frac{\partial H}{\partial q_n} = 0$$

所以哈密顿量与 q_n 并无关系，另外 p_n 又被设定为常数，所以可以视作 H 只依赖于剩下 $2n - 2$ 个坐标。由于 $\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n}$ ，所以 $\dot{q}_n$ 就是常数， q_n 匀速增长。不过既然 H 不依赖于它，我们不关心 q_n 取何值，从而我们得到了 $2n - 2$ 维约化相空间。

下面考虑形式化地给出约化步骤：取 (M, ω) 为辛流形， G 为系统的对称群，对系统有哈密顿作用。有动量映射 $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ 。Lie 群对自身 Lie 代数的伴随作用记为 $Ad : G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ 或 $(a, \xi) \rightarrow Ad_a(\xi)$ ，对矩阵群而言，伴随作用是 $Ad_a(\xi) = a\xi a^{-1}$ 。伴随

作用诱导出余伴随作用 $Ad^* : G \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$, 定义为对于 $\phi \in \mathfrak{g}^*, \xi \in \mathfrak{g}$,

$$Ad_a^*(\phi)(\xi) = \phi(Ad_{a^{-1}}(\xi)) = \phi(a^{-1}\xi a)$$

这样的定义有一个良好的性质:

$$\begin{aligned}\langle Ad_a^*(\phi), Ad_a(\xi) \rangle &= Ad_a^*(\phi)(Ad_a(\xi)) \\ &= \phi(Ad_{a^{-1}}(Ad_a(\xi))) \\ &= \phi(\xi) \\ &= \langle \phi, \xi \rangle\end{aligned}$$

也就是说位于 $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*$ 中元素经过 Lie 群中同一个元素诱导的伴随/余伴随作用后内积不变。

此外, 需要假设动量映射有性质 (G-等变性): $\mu(a \cdot m) = Ad_a^*(\mu(m))$, 根据动量映射的定义:

$$\mathcal{H}_\xi(m) = \langle \mu(m), \xi \rangle$$

使用上述性质:

$$\mathcal{H}_\xi(a \cdot m) = \langle \mu(a \cdot m), \xi \rangle \Rightarrow \mathcal{H}_\xi(a \cdot m) = \langle Ad_a^*(\mu(m)), \xi \rangle = \langle \mu(m), Ad_{a^{-1}}(\xi) \rangle$$

取 $a = \exp(t\eta)$, 两侧求导:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}_\xi(\exp(t\eta) \cdot m) = \frac{d}{dt} \mathcal{H}_\xi(\rho_{t,\eta}(m)) = \mathcal{L}_{V_\eta} \tilde{H}_\xi = V_\eta(\tilde{H}_\xi) = \iota_{V_\eta}(d\tilde{H}_\xi) = \iota_{V_{\mathcal{H}_\eta}} \iota_{V_{\mathcal{H}_\xi}} \omega = \{\mathcal{H}_\eta, \mathcal{H}_\xi\}$$

我们能把 V_η 写成 $V_{\mathcal{H}_\eta}$ 是因为: 由于 G 对 M 的作用是哈密顿作用, 所以这个矢量场既是与 $\mathfrak{g}$ 中的元素关联的, 也是被 M 上哈密顿矢量场 $\mathcal{H}_\eta$ 生成的。右侧:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} Ad_{\exp(-t\eta)}(\xi) &= -ad_\eta \xi = -[\eta, \xi] = [\xi, \eta] \\ \langle \mu(m), [\xi, \eta] \rangle &= \mathcal{H}_{[\xi, \eta]}(m)\end{aligned}$$

我们给出了结果:

$$\{\mathcal{H}_\eta, \mathcal{H}_\xi\} = \mathcal{H}_{[\xi, \eta]}$$

按照本书的约定, 这里少了一个负号。我们期望找到一个 Lie 代数同态。但是, 在一个合理的符号约定下, G-等变性应当与前文给出的 Lie 代数同态性质是自洽的。

利用 G 等变性: 考虑 $\mu(m) = 0$, 任取 $a \in G$, $\mu(a \cdot m) = Ad_a^*(0) = 0$, 因此有 $G \cdot \mu^{-1}(0) = \mu^{-1}(0)$, 也就是说我们选定一个守恒量的值 (全 0) 来指定一个子流形后, 通过把对称群 G 作用在这个子流形上, 我仍然可以移动。也就是说这个子流形内部仍有因对称性导致的规范自由性, 这些规范自由性需要被商掉。

有所谓 Marsden-Weinstein-Meyer 定理: 设 G 为紧 Lie 群, 在辛流形 (M, ω) 上有哈密顿作用, 且有动量映射 μ , 且 G 在 $\mu^{-1}(0)$ 上的作用是自由的, 有如下结果:

- $M_{red} = \mu^{-1}(0)/G$ 为光滑流形
- $\pi : \mu^{-1}(0) \rightarrow M_{red}$ 为 Principle G-Bundle
- 存在唯一约化辛形式 ω_{red} 使得 $\pi^* \omega_{red} = \mu|_{\mu^{-1}(0)}$

Integrable System

Liouville Integrability an Liouville Tori

哈氏系统的守恒量足够多时, 系统的演化可以通过求解一系列代数方程和定积分直接给出。这样的系统称为刘维尔可积系统。

例子: n 个独立谐振子, $H = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} p_i^2 + \frac{1}{2} \omega_i^2 q_i^2 \right) = \sum_{i=1}^n f_i$ 。显然有 $\{f_i, f_j\} = 0, \{f_i, H\} = 0$, 从而每个 f_i 守恒, 系统被限制在子流形 $P_c = \{(q_i, p_i) | f_i(q, p) = c_i\}$ 。直观上, 这些谐振子互相独立, 因此猜测 P_c 同胚于 n 个 S^1 的直积。令

$$p_i = r_i \cos \theta_i, q_i = \frac{r_i}{\omega_i} \sin \theta_i, \text{ 计算得 } dp_i \wedge dq_i = d \left(\frac{r_i^2}{2\omega_i} \right) \wedge d\theta_i, \text{ 取 } I_i = \frac{r_i^2}{2\omega_i}, \text{ 哈氏量 } H = \sum_i \omega_i I_i. \text{ 此时 } I_i \text{ 成为新动量而 } \theta_i$$

成为新坐标。直接看出演化方程 $\dot{I}_i = 0, \dot{\theta}_i = \omega_i$ 。也就是说 I_i 是常数, 只负责将系统限制在子流形上; θ_i 方向上匀角速度转动。

考虑 $2n$ 维 哈氏系统 (M, ω, H) , 称其上的 n 个运动积分 $f_1, \dots, f_n$ 是独立的, 若 $df_1, \dots, df_n$ 点点线性无关, 从而 $v_{f_1}, \dots, v_{f_n}$ 也点点线性无关。若它们又有两两泊松对易的性质:

$$0 = \{f_i, f_j\} = \iota_{v_{f_i}} \iota_{v_{f_j}} \omega = \omega(v_{f_i}, v_{f_j}) = 0$$

从而 $\{v_{f_1}, \dots, v_{f_n}\}$ 张成 $T_p M$ 的迷向子空间。称 (M, ω, H) 刘维尔完全可积, 若可找到最大数目的 (n 个) 泊松对易的运动积分。称 $c \in \mathbb{R}^n$ 是正规的, 若 $f^{-1}(c)$ 上 $df_1 \cdots df_n$ 线性无关, 此时 $f^{-1}(c)$ 为拉格朗日子流形。这是因为 $v \in T_p M$ 要在 $T_p L$ 中当且仅当 $v(f_i) = 0$, 由于 $\{f_i, f_j\} = V_{f_i}(f_j) = 0$, 可知 $\forall i, V_{f_i}$ 都切于 L 。因此 $\{V_{f_i}\}$ 张成 L 的切空间, 而 $\omega(V_{f_i}, V_{f_j}) = 0$ 。

有 Liouville-Arnold 定理陈述这一结果: 取 (M, ω, H) 为 $2n$ 维可积系统, 运动积分 $f_1, \dots, f_n$, 取 $c = (f_1, \dots, f_n)^T$, 有结论:

- $f^{-1}(c)$ 是在相流下不变的光滑流形
- 若 $f^{-1}(c)$ 是紧连通的, 它同胚于 $T^n = \{(\phi_1, \dots, \phi_n) \bmod 2\pi\}$
- $\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i(c)$, 即每个角度都匀速转动, 这些坐标被称为角变量
- 存在坐标 $I_1, \dots, I_n$ 为运动积分, $\omega = \sum_i dI_i \wedge d\phi_i$, 这些坐标称为作用变量

这些角变量和作用变量可以被构造出来。首先, 守恒量 I_i 通过沿着环面上基本环的积分给出:

$$I_i(c) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} \sum_k p_k(c, q) dq_k$$

其中 γ_i 是一个基本环, $p_k(c, q)$ 是反解出的动量。这个结果显然是一个运动积分。考虑正则变换 $(q_i, p_i) \rightarrow (\phi_i, I_i)$, 其第二类生成函数通过环面上的积分定义:

$$S(I, q) = \int_{q_0}^q \sum_k p_k(\tilde{q}, I) d\tilde{q}_k$$

由于前面已经定义了 $I_i(c)$, 所以这里将 c 换成了 I 。由于环面上辛形式退化, 所以 $d(\sum_i p_i dq_i) = 0$, 从而 $\sum_i p_i dq_i$ 是闭形式, 也就是说两条路径只要同伦, 积分就相等。最后定义角变量 $\phi_i = \frac{\partial S}{\partial I_i}$ 。如果 S 的积分环路绕第 i 基本环一圈, 积分值增加 $2\pi I_i$, 对应的 ϕ_i 恰好增加 2π 。由于这样的构造天然满足了 $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$ 的性质, 可以说明 $(q_i, p_i) \rightarrow (\phi_i, I_i)$ 确实是正则变换:

$$dS = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial S}{\partial I_i} dI_i = \sum_i p_i dq_i + \sum_i \phi_i dI_i$$

两边再取外微分得到:

$$\sum_i dp_i \wedge dq_i = \sum_i d\phi_i \wedge dI_i$$

HJB Equation and Liouville Integrability

考虑系统的哈密顿量不显含时间, 那么它完全是一个关于 $q_1, \dots, q_n$ 的 PDE, 称一个解 $W(\tilde{p}, q)$ 是它的局部完全解, 若:

- $H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}(\tilde{p}, q)\right) = E(\tilde{p}), \quad \tilde{p} = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n)$
- Hessian 的行列式非零, 即 $\det\left(\frac{\partial^2 W(\tilde{p}, q)}{\partial \tilde{p}_i \partial q_j}\right) \neq 0$

第一条是不含时的 HJB 方程。第二条有两个作用: 考虑从 $p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_d; q_1, \dots, q_d)$ 中反解出 $\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(q, p)$, 这要求:

$$\det\left(\frac{\partial p_i}{\partial \tilde{p}_j}\right) \neq 0 \Rightarrow \det\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \tilde{p}_j \partial q_i}\right) \neq 0$$

考虑从 $\tilde{q}_i = \frac{\partial W}{\partial \tilde{p}_i}(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_d; q_1, \dots, q_d)$ 中反解出 q , 要求:

$$\det\left(\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_j}\right) \neq 0 \Rightarrow \det\left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_j \partial \tilde{p}_i}\right) \neq 0$$

因此，如果第二个条件被满足，给定 (p, q) 和 $W(\tilde{p}, q)$ ，可以反解 $\tilde{p}$ ，再求出 $\tilde{q}$ ；给定 $(\tilde{p}, \tilde{q})$ 和 $W(\tilde{p}, q)$ ，也可以先反解 q ，再求出 p 。我们有了相空间上可逆的坐标变换 $(q, p) \rightarrow (\tilde{q}, \tilde{p})$ 。在新的坐标系下，由于 $H = E(\tilde{p})$ ，所以有：

$$\dot{\tilde{p}}_i = 0, \quad \dot{\tilde{q}}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i} = \omega_i(\tilde{p})$$

这回到了和上面 Liouville-Arnold 定理相同的结果：广义动量是守恒量，而广义坐标匀速变化。

下面说明：HJB 方程局部完全解的存在性和系统的刘维尔可积性是等价的。首先，若存在局部完全解，则 $\tilde{p}_i$ 就是泊松对易的 d 个运动积分。而若系统是刘维尔可积的，我可在等值面 $f^{-1}(c)$ 上选择坐标 q ，使得动量可以被局部解出： $p = p(c, q)$ 。构造

$$W(c, q) = \int_{q_0}^q \sum_k p_k(c, q') dq'$$

这个积分是与路径无关的。显然有 $p_i(c, q) = \frac{\partial W(c, q)}{\partial q_i}$ ，代入哈密顿量：

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}(c, q)\right) = H(q, p(c, q)) = E(c)$$

这就是 HJB 方程， $W(c, q)$ 就是其完全解。